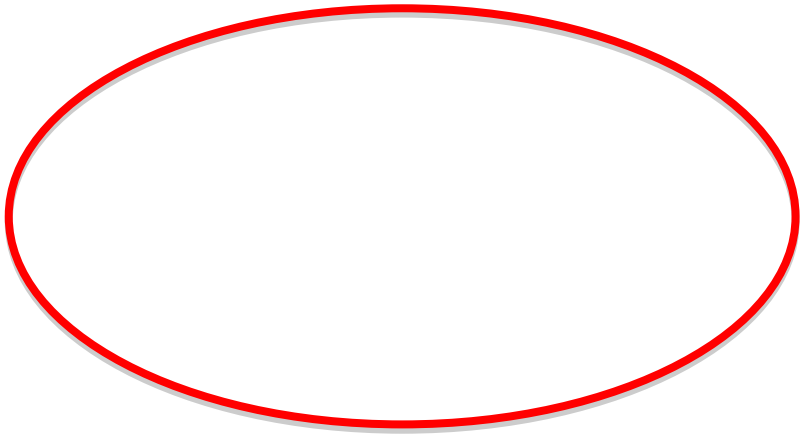
Otared Kavian

Introduction à la Théorie des Points Critiques

et Applications aux Problèmes Elliptiques



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Avant propos

Les pages [1] qui suivent sont le développement d'un cours de DEA enseigné pendant les années universitaires 1987–1988 et 1991–1992 à l'Université de Nancy I.

Il nous a semblé utile de regrouper dans un premier chapitre intitulé *Quelques outlis de base* divers résultats qu'il est bon de connaître lorsque l'on aborde l'étude des problèmes semilinéaires soit par les méthodes variationnelles, soit par d'autres méthodes. Nous n'avons pas hésité, au risque de paraître trop élémentaire, à rappeler des résultats qui sont peut-être du niveau d'une troisième ou quatrième année d'études universitaires. Cependant le lecteur intéressé par les méthodes variationnelles peut survoler les deux premiers chapitres et commencer son étude par le chapitre 3.

Nous devrions également insister sur le fait que ces notes sont destinées avant tout aux étudiants et chercheurs de différents niveaux qui commencent l'étude des techniques de points critiques. Par conséquent sur bon nombre de points il n'y a pas de référence aux derniers résultats connus et nous ne dressons pas l'*état de l'art*. C'est aussi la raison qui nous a poussé à inclure un grand nombre d'*Exercices* comme des compléments de cours ou des prétextes à un entraînement. Malheureusement, faute d'espace et contrairement à notre intention de départ, nous n'avons pas pu inclure un chapitre d'*Indications* pour la résolution des exercices ni un chapitre de *Solutions*.

Les différents lemmes, propositions, théorèmes, corollaires, exemples et remarques d'une part, et les formules d'autre part, sont numérotés dans chaque chapitre, par paragraphe, de manière séquentielle. Par ailleurs une référence du type "lemme **1.**4.8" ou bien "l'équation **3.**(9.4)" se reporte au lemme 4.8 du chapitre 1 ou à l'équation (9.4) du chapitre 3.

Je dois remercier mes amis Philippe Bougerol, Thierry Cazenave, Gérard Kerk Yacharian, Claude Morlet, Bernard Roynette avec qui j'ai eu des discussions plus ou moins nombreuses et toujours fort utiles lorsqu'ils m'ont fait part de leur sentiment de *non-spécialistes* des méthodes variationnelles, ainsi que Bopeng Rao qui m'a fait l'amitié de lire une grande partie de la première version. Elisabeth Rouy, avec une patience et une efficacité sans pareilles, a entièrement relu le texte et m'a suggéré de nombreuses améliorations de style ; je suis néanmoins le seul responsable des erreurs et imperfections que l'on rencontrera par la suite.

[1] Cet ouvrage a été rédigé avec l'aide du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Délégation à l'Information Scientifique et Technique (*DIST*).

Jean Michel Coron m'a sans cesse encouragé de terminer la rédaction de ces notes, et a toujours fait semblant de me croire lorsque je lui disais qu'il aurait les notes définitives dans deux ou trois mois, promesses qui ont été répétées une dizaine de fois... Je lui exprime ici toute mon amitié, et je le remercie pour les remarques qu'il a faites sur divers points du texte qui suit. Enfin je remercie Henri Berestycki et Thierry Gallouët qui ont soutenu le projet de parution de ces notes dans la collection de la SMAI.

Je ne pourrais pas finir cet *Avant Propos*, sans exprimer toute ma tendresse pour Elisabeth, Azadeh et Niloufar qui ont notamment toléré que le petit bureau familial soit envahi par une multitude d'articles, de notes et de brouillons : Niloufar a toujours pensé que le bureau était suffisamment ordonné, Azadeh a rangé régulièrement, souvent trop bien, et enfin Elisabeth s'y est résignée avec philosophie.

O.K.
Nancy, le 20 Juillet 1993

Table des matières

Avant-propos v

Chapitre 1. Quelques outils de base 1
1. Motivations 1
2. Espaces réflexifs, espaces de Hilbert 5
3. Espaces de fonctions continues 7
4. Quelques critères de convergence 9
5. Théorème de changement de variable 14
6. La mesure superficielle 18
7. La formule d'intégration par parties 19
8. Espaces de Sobolev 23
9. Opérateurs elliptiques du second ordre 38
10. Principes du maximum 42
11. Théorèmes de régularité 44
12. Valeurs propres 48
13. Dérivées et points critiques 52
14. Multiplicateurs de Lagrange 55
15. Fonctions convexes 58
16. Quelques opérateurs continus 60
17. Quelques fonctionnelles différentiables 63
Exercices du chapitre 1 70

Chapitre 2. Le degré topologique 97
1. Degré topologique de Brouwer 97
2. Propriétés du degré 102
3. Quelques applications 107
4. Le genre 115
5. Degré topologique de Leray-Schauder 120
6. Propriétés du degré de Leray-Schauder 125
7. Exemples d'application 126
Exercices du chapitre 2 131

Chapitre 3. Points critiques sans contrainte 135
1. Fonctionnelles minorées 135
2. Exemples d'application 139

3. Le théorème de Ky Fan-von Neumann 145
4. Une application du théorème de min-max 149
5. Ensembles de niveau et points critiques 153
6. Condition de Palais-Smale 156
7. Le lemme de déformation 164
8. Le théorème du col 169
9. Points critiques multiples 175
Exercices du chapitre 3 185

Chapitre 4. Points critiques avec contraintes 195
1. Pourquoi des contraintes ? 195
2. La condition de Palais-Smale 199
3. Champ de pseudo-gradient tangent 204
4. Le Lemme de déformation 207
5. Quelques applications du principe de min-max 209
Exercices du chapitre 4 216

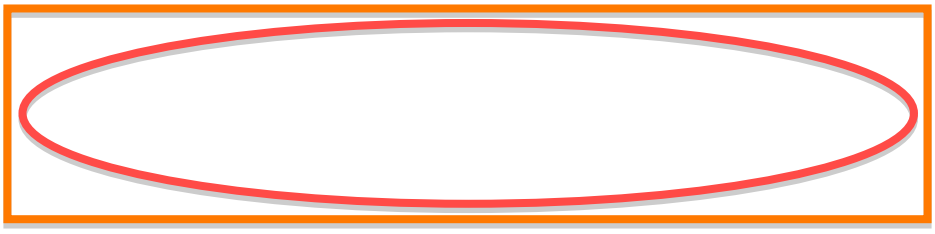
Chapitre 5. Fonctionnelles sans symétrie 223
1. La situation du problème 223
2. Perturbations de fonctionnelles paires 224
3. Comportement des valeurs critiques 228
4. Un problème semilinéaire non homogène 233
5. Problèmes de demi-valeurs propres 239
6. Existence de demi-valeurs propres 242
Exercices du chapitre 5 245

Chapitre 6. Problèmes sans compacité 249
1. Compacité des fonctions à symétrie sphérique 250
2. L'identité de Pohožaev et ses conséquences 253
3. Symétrisation de Schwarz ou réarrangement 259
4. Existence d'un état fondamental 266
5. Le Cas de la dimension deux 276
6. Le lemme de Lieb 279
7. Une application du lemme de Lieb 280
8. La méthode de concentration-compacité 285
9. L'exemple de l'équation de champ 294
10. L'exposant limite de Sobolev 298
Exercices du chapitre 6 302

Bibliographie 311

Index des notations 320

Index 321



1 Quelques outils de base

1. Motivations

La résolution de l'équation $Ax - b = 0$ où A, une matrice symétrique d'ordre $n \geq 1$, et $b \in \mathbb{R}^n$ sont donnés, revient à chercher un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$$

s'annule en x_0 (où par $(\cdot|\cdot)$ on désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$). Ce point de vue, qui en apparence semble plus laborieux (du moins dans le cas où $n = 1$), a l'avantage de se généraliser à un grand nombre de problèmes linéaires ou non-linéaires dans un cadre abstrait ; d'autre part (considérer le cas où $n \geq 2$ sur cet exemple), au lieu d'étudier l'opérateur $x \mapsto Ax - b$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ on étudiera une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui pourrait être plus simple. Par ailleurs un grand nombre d'équations aux dérivées partielles décrivant des modèles de la physique, de la chimie ou de la mécanique peuvent être étudiées avec ce point de vue : par exemple une solution qui correspond à un état d'équilibre est obtenue comme un point de minimum d'une *fonctionnelle d'énergie*.

Cette approche *variationnelle* a été notamment employée pour la résolution de l'équation de Laplace qui intervient en particulier en électro-statique et, en fait, sur cet exemple on voit précisément le type de difficultés que l'on rencontre dans le *calcul des variations* (voir R. Courant [49] où on trouvera également les problèmes liés aux applications conformes et aux surfaces minimales). Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$. Si φ est une fonction continue définie sur $\partial\Omega$, il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Comme on l'a remarqué depuis Gauss, lord Kelvin et Dirichlet, en posant :

$$J(v) := \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \qquad K_0 := \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) \ ; \ v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

si l'on parvient à trouver une fonction $u \in K_0$ telle que $J(u) \leq J(v)$ lorsque v parcourt K_0, alors u est solution de (1.1). En effet, pour toute fonction $w \in C_c^2(\Omega)$ et tout $t > 0$ on a $u \pm tw \in K_0$ et :

$$J(u) \leq J(u \pm tw) = J(u) \pm 2t \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + t^2 J(w),$$

ce qui entraîne que $tJ(w) \pm 2 \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx \geq 0$. En faisant tendre t vers zéro et finalement par intégration par parties on voit que :

$$0 = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx = - \int_\Omega \Delta u(x) \cdot w(x) dx.$$

Comme cela est vrai pour tout $w \in C_c^2(\Omega)$, on en conclut, en fin de compte, que $\Delta u = 0$ dans Ω ; par ailleurs puisque $u \in K_0$, on a aussi $u = \varphi$ sur le bord $\partial\Omega$, et par conséquent u est solution de (1.1).

Le fait que l'on puisse trouver la solution de (1.1) par ce procédé a été utilisé par Riemann, qui l'a appelé *principe de Dirichlet*, alors que la fonction J porte le nom de *l'intégrale de Dirichlet*. Cependant Weierstrass a objecté en 1869 qu'il y avait une faille dans le principe de Dirichlet. En effet, s'il est vrai que la borne inférieure

$$\alpha := \inf_{v \in K_0} J(v),$$

est un réel positif ou nul, il n'est pas du tout clair pourquoi elle serait atteinte. Autrement dit, il n'est pas évident qu'une suite minimisante $(u_n)_n$ de K_0, i.e. telle que $u_n \in K_0$ et $J(u_n) \to \alpha$, converge dans l'ensemble K_0, ni même qu'elle soit bornée dans l'espace $C^2(\overline{\Omega})$. En fait, dans certains cas, on sait montrer que (1.1) admet une solution *qui n'appartient pas* à K_0 ce qui, compte tenu de l'unicité de la solution, montre que la borne inférieure α n'est pas atteinte.

En vérité, si le principe de Dirichlet donne un moyen élégant pour résoudre l'équation de Laplace (1.1), une première difficulté est de choisir l'ensemble K_0 où on va minimiser la fonction J, et la difficulté essentielle est de montrer que la borne inférieure est atteinte, i.e. que α est un *minimum*. Pour montrer qu'une borne inférieure est atteinte, on doit disposer de critères de compacité assurant que les suites minimisantes sont relativement compactes pour une certaine topologie, suffisamment riche et maniable pour être exploitée dans le cadre de la fonctionnelle à minimiser. Par exemple, dans le cas ci-dessus, il faudra remplacer dans la définition de K_0, l'espace $C^2(\overline{\Omega})$ par l'espace de Hilbert obtenu en complétant $C^2(\overline{\Omega})$ pour la norme :

$$\|v\|_{1,2,\Omega} := \left(\int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \right) \right)^{1/2}.$$

Aux chapitres 3, 4 et 6 nous étudierons la minimisation de fonctionnelles, sous diverses hypothèses concernant la fonctionnelle ou l'ensemble où on cherche le minimum.

Un autre exemple où les méthodes variationnelles constituent un bon cadre, c'est lorsque l'on souhaite montrer la multiplicité de solutions, par exemple l'existence d'une infinité de solutions, comme dans le problème suivant. Supposons que Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^3$ et que l'on s'intéresse à la question de savoir si l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

admet des solutions non-triviales (ou non-banales), i.e. des solutions différentes de la solution nulle. Un moyen simple pour voir l'existence d'au moins une solution, est de considérer l'intégrale de Dirichlet J, définie plus haut, sur l'ensemble :

$$S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \; ; \; \int_\Omega v^4(x)dx = 1 \right\}.$$

Ici l'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Hilbert de fonctions où l'intégrale de Dirichlet peut être considérée comme le carré d'une norme, plus précisément le complété de $C_c^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,2,\Omega}$. Alors, en montrant que la borne inférieure :

$$\lambda := \inf_{v \in S} J(v)$$

est atteinte en un point $v_0 \in S$, on peut montrer qu'il existe *un multiplicateur de Lagrange* $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$-\Delta v_0 = \mu v_0^3.$$

En multipliant (au sens du produit scalaire de $L^2(\Omega)$) les deux membres de cette égalité par v_0 et en effectuant une intégration par parties, on voit que :

$$\begin{aligned} \lambda = J(v_0) = \int_\Omega |\nabla v_0(x)|^2 dx &= -\int_\Omega \Delta v_0(x) \cdot v_0(x) dx \\ &= \mu \int_\Omega v_0^4(x)dx = \mu. \end{aligned}$$

Cela implique que $\mu = \lambda > 0$, et en posant $u_0 := \mu^{1/2} v_0$, on peut vérifier que $u_0 \not\equiv 0$ est solution de (1.2). Noter qu'ici la construction de u_0 par *homothétie* à partir de v_0 est rendue possible parce que la non-linéarité $u \mapsto u^3$ est homogène.

Expliquons pourquoi on s'attend à ce que (1.2) admette une infinité de solutions. Sur l'espace $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$ des suites de carré sommable, considérons l'opérateur :

$$Au := ((n+1)^2 u_n)_{n \geq 0}$$

défini sur le domaine $D(A) := \left\{ u \in \ell^2 \; ; \; Au \in \ell^2 \right\}$. Pour $u \in \ell^2$, désignons par u^3 la suite définie par : $u^3 := (u_n^3)_{n \geq 0}$. Alors l'équation (1.2) *ressemble* d'une certaine manière à :

$$\begin{cases} Au = u^3 \\ u \in D(A). \end{cases} \tag{1.3}$$

On voit tout de suite que si $e_k := (\delta_n^k)_{n \geq 0}$, alors pour tout $k \geq 0$ la suite $u := (k+1)e_k$ est solution de . On peut considérer que e_k minimise la fonction $v \mapsto (Av|v)$ sur l'ensemble

$$M_k := \left\{ v \in \ell^2 \; ; \; v_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq k-1, \text{ et } \sum_{i=k}^{\infty} |v_i|^4 = 1 \right\},$$

et que la valeur de ce minimum est précisément $(k+1)^2$; ensuite par le procédé d'homothétie que nous venons de signaler on vérifie que $(k+1)e_k$ est solution de (1.3).

Naturellement l'équation (1.2) ne se prête pas aussi simplement à l'étude, mais cependant l'idée de trouver des solutions en construisant des *valeurs critiques* pour l'intégrale de Dirichlet $J(v)$ sur des ensembles *topologiquement différents* peut être conservée. Pour l'équation (1.3) les ensembles M_k sont toplogiquement différents en ce sens que l'espace vectoriel engendré par M_k est de codimension k. Nous verrons que pour (1.2) la notion adéquate pour distinguer topologiquement les ensembles n'est plus celle d'être de codimension k, mais plutôt celle d'être de *genre* k.

Dans le cours qui suit, nous ne traitons systématiquement que des problèmes semilinéaires faisant intervenir le laplacien ou un opérateur auto-adjoint d'ordre deux (et le plus souvent avec la condition de Dirichlet) ; mais un examen rapide des méthodes employées permet de voir que beaucoup d'autres problèmes, où l'opérateur sous-jacent est auto-adjoint, peuvent être traités par les mêmes procédés (en particulier les problèmes faisant intervenir le bilaplacien Δ^2 pour les problèmes de plaques, le p-laplacien $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, un grand nombre de problèmes vectoriels, etc.).

Dans la suite de ce chapitre nous regroupons quelques résultats de base qui seront utilisés dans les chapitres suivants, ou qu'il nous semble utile de connaître pour étudier les problèmes non-linéaires. Par commodité nous avons inclus des résultats qui sont en règle générale supposés acquis ou du domaine du grand public, mais dont il n'est pas facile de trouver dans les manuels les plus courants une démonstration accessible. Certains résultats énoncés mais non démontrés dans le texte sont traités sous forme d'*Exercices* à la fin du chapitre.

Au chapitre 2 nous introduirons la notion de degré topologique qui permet de montrer entre autres choses le théorème de Borsuk-Ulam qui conduit à la définition du *genre*. Nous donnerons également dans la liste des *Exercices* un certain nombre de cas où on peut utiliser la notion du degré topologique pour résoudre des équations semilinéaires.

Le chapitre 3 est consacré aux problèmes de minimisation sans contrainte (ou avec une contrainte convexe), et plus généralement on y aborde les techniques de recherche de points critiques pour des fonctionnelles définies sur un espace de Banach, sans imposer de contrainte. Comme exemple d'application de ces techniques nous résoudrons quelques problèmes semilinéaires du type $-\Delta u = g(x,u)$. Au chapitre 4 nous aborderons une étude analogue mais sur différents types de contrainte.

Au chapitre 5 nous étudierons quelques problèmes sans symétrie, où on peut montrer néanmoins l'existence de solutions multiples. Enfin au chapitre 6 nous aborderons les problèmes de minimisation sans compacité.

2. Espaces réflexifs, espaces de Hilbert

Dans la suite on ne considère que des espaces de Banach réels, même si certaines notions se généralisent sans peine au cas complexe. Lorsque X est un espace de Banach, nous désignerons par X' son dual topologique ; si $x \in X$ et $\ell \in X'$, la valeur de ℓ en x, ou l'action de ℓ sur x, sera notée $\langle \ell, x\rangle$ ou encore $\ell(x)$. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X on dira que $(x_n)_n$ (ou x_n) *converge faiblement* vers x^* si pour toute $f \in X'$ on a

$$\langle f, x_n\rangle = f(x_n) \to f(x^*) = \langle f, x^*\rangle.$$

On écrira alors $x_n \rightharpoonup x^*$ ou bien $x_n \to x^*$ dans X_w. Lorsqu'on dit que $(x_n)_n$ ou x_n converge (ou converge fortement) vers x^*, on entend par-là que la convergence a lieu au sens de la norme de X, i.e. $\|x^* - x_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Si X est un espace de Banach et X' son dual, on dit qu'une suite $(f_n)_n$ de X' tend vers f dans X'-faible* (et on écrit $f_n \rightharpoonup^* f$ dans X'_{w^*}), si pour tout $x \in X$ on a $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$. On notera que $(f_n)_n$ étant une suite de X' et $(x_n)_n$ une suite de X, alors si $f_n \to f$ dans X' et $x_n \rightharpoonup x$ dans X_w, on a $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Le même résultat subsiste si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans X'_{w^*} et $x_n \to x$ dans X. Il est également utile de savoir que si $x_n \rightharpoonup x$, alors on a :

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{2.1}$$

Soit X un espace de Banach ; comme X' est à son tour un espace de Banach, on peut considérer son dual $X'' := (X')'$ (on dit que X'' est le bidual de X). On voit alors facilement qu'il existe une injection canonique de X dans X''. On dit que X est un espace *réflexif* si cette injection est une bijection : on identifie alors X et X''. Par exemple un espace de Hilbert est réflexif et en fait, dans ce cas, si on est dans une situation abstraite où il n'y a qu'un seul espace de Hilbert qui intervient, on identifie non seulement l'espace de Hilbert et son bidual, mais aussi l'espace de Hilbert et son dual (grâce au théorème de Riesz). Cependant il faut prendre garde de ne pas identifier *simultanément* les espaces duals de deux espaces de Hilbert dont l'un est contenu dans l'autre. Plus précisément soient H_0 et H_1 deux espaces de Hilbert distincts dont les normes sont désignées par $\|\cdot\|_0$ et $\|\cdot\|_1$. On suppose que pour une constante positive c :

$$H_1 \subset H_0, \qquad \text{et} \qquad \forall u \in H_1, \quad \|u\|_0 \leq c\,\|u\|_1,$$

et que de plus H_1 est dense dans H_0. On peut donc identifier H_0', dual de H_0, à une partie de H_1', dual de H_1, et écrire $H_0' \subset H_1'$ avec injection continue. Il est clair que si, par exemple, on décide d'identifier par le théorème de Riesz H_0 et H_0', alors on ne peut plus à la fois considérer H_1 comme un sous-espace de H_0 et identifier H_1 et H_1'. Souvent, lorsque H_0 est l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$, on décide d'identifier H_0 et H_0', et de ce fait on s'interdit d'identifier un espace de Hilbert plus petit (c'est à dire contenu dans $L^2(\Omega)$) à son dual.

Les espaces réflexifs jouent un rôle important dans les méthodes variationnelles à cause de la propriété suivante (voir par exemple K. Yosida [165, Appendix to chapter V, § 4] ou H. Brezis [28, théorèmes III.27 et III.28]) :

2.1 Théorème (Eberlein-Shmulyan). *Un espace de Banach X est réflexif si, et seulement si, toute suite bornée $(x_n)_n$ de X contient une sous-suite $(x_{n_i})_i$ qui converge faiblement dans X.*

Dans la pratique on utilise ce résultat lorsqu'on sait que l'espace dans lequel on travaille est réflexif et que l'on souhaite montrer qu'une certaine suite est relativement compacte (au moins pour une topologie raisonnablement maniable). On commence alors par remarquer que, grâce à ce théorème, cette suite est relativement compacte pour la topologie faible de X. Ensuite, il reste à montrer, mais évidemment cela n'est pas vrai en général, que cette sous-suite faiblement convergente est en réalité fortement convergente dans X (ou dans un espace de Banach plus grand). En général l'une des grandes difficultés des problèmes semilinéaires (ou non-linéaires) réside dans ce passage de la convergence faible à la convergence forte.

2.2 Remarque. Lorsque X est un espace de Banach quelconque, toute suite $(f_n)_n$ bornée dans X' contient une sous-suite $(f_{n_i})_i$ qui converge dans X'-faible*. Cela est particulièrement utilisé dans le cas où X est l'espace $L^1(\Omega)$ et par conséquent X' est l'espace $L^\infty(\Omega)$. De manière générale la seule convergence faible *maniable* dans $L^\infty(\Omega)$ est la convergence faible* des suites. □

Si H est un espace de Hilbert, on note par $\|\cdot\|$ sa norme et par $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire définie sur $H \times H$ à valeurs réelles. Dire que $a(\cdot,\cdot)$ est *continue*, signifie que :

$$M := \sup\{\, a(u,v)\ ;\ u,v \in H,\ \|u\| = \|v\| = 1\} < \infty. \tag{2.2}$$

En particulier pour tous $u, v \in H$ on a la majoration :

$$|a(u,v)| \le M\,\|u\| \cdot \|v\|.$$

On dit que $a(\cdot,\cdot)$ est *coercive* ou *uniformément elliptique* sur H s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall u \in H, \qquad a(u,u) \ge \alpha \|u\|^2. \tag{2.3}$$

Rappelons le lemme de Lax-Milgram, qui est fondamental pour la résolution de problèmes du type de celui de l'équation de Laplace (P.D. Lax & A.N. Milgram [94], pour la démonstration voir le livre de H. Brezis [28] ou *Exercices*).

2.3 Lemme de Lax-Milgram. *Soient H un espace de Hilbert et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :*

$$\forall v \in H, \qquad a(u,v) = \langle f, v\rangle. \tag{2.4}$$

De plus l'application $f \mapsto u$ est continue de H' dans H et les constantes α, M étant données par (2.2), (2.3) on a :

$$\|u\| \le \frac{M}{\alpha}\,\|f\|.$$

De plus si $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique (i.e. $a(\varphi,\psi)=a(\psi,\varphi)$ pour tous $\varphi,\psi\in H$), et si $J(v):=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle f,v\rangle$, alors la solution de (2.4) est donnée par le problème de minimisation :

$$\text{trouver } u\in H, \qquad \forall v\in H, \qquad J(u)\le J(v).$$

3. Espaces de fonctions continues

Nous donnons ici les notations et conventions utilisées dans la suite en ce qui concerne les espaces de fonctions continues ou k fois dérivables. Soit Ω un ouvert (ou un fermé) de $\mathbb{R}^N$. On notera $C(\Omega)$ (ou parfois $C^0(\Omega)$) l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}^m$ sera noté $C(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ou $(C(\Omega))^m$. Rappelons d'abord un lemme topologique classique (c'est le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn, voir par exemple J. Dieudonné [57, théorème 4.5.1] ou *Exercices*).

3.1 Lemme (Tietze-Urysohn). *Soient A un ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$ et $f : A\longrightarrow\mathbb{R}^m$ une application continue et bornée. Il existe alors un prolongement continu $\widetilde{f}$ de f défini sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (i.e. tel que $\widetilde{f}=f$ sur A et $\widetilde{f}(\mathbb{R}^N)\subset\mathbb{R}^m$). De plus pour $1\le j\le m$ on a :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\widetilde{f}_j(x)=\sup_{x\in A}f_j(x), \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^N}\widetilde{f}_j(x)=\inf_{x\in A}f_j(x).$$

Ce lemme permet de voir que si Ω est un ouvert borné et $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ une application continue, alors il existe une suite de fonctions régulières (i.e. de classe C^∞) $(f_i)_i$ telle que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)-f_i(x)|\to 0,$$

lorsque $i\to+\infty$. En effet il suffit de régulariser par convolution le prolongement $\widetilde{f}$ et de la tronquer.

On désigne par $C_b(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$ (on notera que cet espace est distinct de $C(\overline{\Omega})$ lorsque Ω est non borné) ; $C_b(\overline{\Omega})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ i.e.

$$\|u\|_\infty:=\|u\|_{\infty,\Omega}:=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|.$$

On désigne enfin par $C_0(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et qui sont nulles sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω (si Ω est non borné, cela signifie que ces fonctions tendent vers zéro à l'infini).

Si $0<\alpha\le 1$ et Ω est un ouvert (ou un fermé) de $\mathbb{R}^N$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α en tout point x_0 de Ω :

$$\exists\delta,M>0 \quad \forall x\in\Omega\cap B(x_0,\delta), \quad |u(x)-u(x_0)|\le M|x-x_0|^\alpha.$$

Si $\alpha = 1$ on dit aussi que u est lipschitzienne en x_0. On dit que u est uniformément höldérienne d'exposant α sur Ω, s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $x, y \in \Omega$ on ait $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha$.

On note $C_b^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions uniformément höldériennes et bornées sur $\overline{\Omega}$. Cet espace est muni de la norme :

$$\|u\|_{C_b^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_\infty + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Pour $k \geq 1$ entier et un ensemble *ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k, notée $D^k u$, est continue sur Ω. $C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et contenu dans Ω. Pour $\alpha \in]0, 1]$ on désigne par $C^{k,\alpha}(\Omega)$ les fonctions de $C^k(\Omega)$ telles que les dérivées d'ordre k sont höldériennes d'exposant α au voisinage de tout point $x_0 \in \Omega$.

Pour $k \geq 0$ entier et Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, nous définissons $C^k(\overline{\Omega})$ comme l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k(\mathbb{R}^N)$. On notera ici qu'il y a une différence fondamentale entre la définition de $C^k(\Omega)$ et celle de $C^k(\overline{\Omega})$. Parfois, dans certains ouvrages, $C^k(\overline{\Omega})$ est défini comme étant l'ensemble des $u \in C^k(\Omega)$ telles que pour tout $j \overset{\geq}{\leq} 0 \overset{}{} k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$ la limite $\lim_{x\to x_0} D^j u(x)$ existe et dépend continûment de x_0. Bien que d'une certaine manière ce point de vue soit plus naturel, dans la plupart des cas concrets que nous rencontrerons par la suite, la définition que nous avons adoptée est plus utile et, comme on pourra le voir dans les *Exercices*, lorsque Ω est *régulier* les deux définitions coïncident. On désignera par $\partial_i u$ la dérivée $\partial u/\partial x_i$, et pour un multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^N$ de longueur $|\beta| := \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_N \leq k$, on pose : $\partial^\beta u := \partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\cdots\partial_N^{\beta_N} u$. L'espace $C_b^k(\overline{\Omega})$ (des éléments $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tels que $D^j u \in C_b(\overline{\Omega})$ pour $0 \leq j \leq k$) est muni de la norme :

$$\|u\|_{C_b^k(\overline{\Omega})} := \sum_{j=0}^{k} \|D^j u\|_\infty,$$

où de façon générale, si $\|\cdot\|_X$ est une norme, on adopte la convention :

$$\|D^j u\|_X := \max_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^N\\ |\beta|=j}} \|\partial^\beta u\|_X.$$

Pour $\alpha \in]0, 1]$, l'espace $C_b^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ telles que les dérivées d'ordre k sont höldériennes d'exposant α dans $\overline{\Omega}$, et la fonction u ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont dans $C_b(\overline{\Omega})$. La norme de $C_b^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est définie par :

$$\|u\|_{C_b^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{0\leq j\leq k} \|D^j u\|_\infty + \|D^k u\|_{C_b^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Il faut savoir que si Ω est suffisamment *régulier* (au sens défini plus loin au paragraphe § 6) et si $k+\alpha < k'+\alpha'$, alors on a l'inclusion $C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^{k',\alpha'}(\Omega)$. Mais pour un ouvert *quelconque* Ω cela est *faux* comme on peut le voir sur l'exemple de l'*Exercice 2*.

De façon générale, en ce qui concerne les inclusions entre espaces de fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, il faut toujours avoir à l'esprit qu'il est nécessaire de faire des hypothèses adéquates sur la régularité de Ω. Dans toute la suite, dans la mesure où nous nous intéresserons uniquement à la résolution des équations aux dérivées partielles par des méthodes variationnelles sans nous préoccuper des conditions de régularité optimales, nous supposerons que l'ouvert Ω est suffisamment régulier pour que les situations pathologiques soient évitées.

Par le théorème d'Ascoli, lorsque Ω est un ouvert connexe, borné et de classe C^k (au sens défini au paragraphe § 7), l'injection de $C^k(\overline{\Omega})$ dans $C^{k-1}(\overline{\Omega})$ est compacte (rappelons aussi que $C^k(\overline{\Omega})$ est dense dans $C^{k-1}(\overline{\Omega})$).

Par ailleurs comme on peut le voir à l'*Exercice 3*, si $0 < \alpha \leq 1$, les espaces $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *ne sont pas séparables*. Cela empêche en particulier, lorsqu'on travaille dans les espaces de fonctions höldériennes, de faire des raisonnements utilisant la densité des fonctions régulières. De plus, pour $k+\alpha > j+\beta$, l'espace $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ n'est pas dense dans $C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$. Enfin si Ω est un ouvert connexe, borné et de classe $C^{k,\alpha}$, l'injection de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$ est compacte si $k+\alpha > j+\beta$.

4. Quelques critères de convergence

Nous regroupons ici les résultats qui permettront de manipuler les différentes notions de convergence de suites dans les espaces $L^p(\Omega)$. Les démonstrations de ces résultats peuvent être trouvées en règle générale dans les livres sur la théorie de la mesure et l'intégration. On pourra notamment consulter W. Rudin [145] et E. Hewitt & K. Stromberg [82]. Nous énonçons systématiquement ce qui suit en considérant un borélien Ω de $\mathbb{R}^N$ et la mesure de Lebesgue notée dx. Cependant la plupart de ces résultats sont vrais pour des espaces mesurés et des mesures σ-finies plus générales. Pour $1 \leq p \leq \infty$, la norme de $L^p(\Omega)$ sera notée $\|\cdot\|_p$.

4.1 Théorème de la convergence monotone. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. En notant $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, on a :*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

4.2 Lemme de Fatou. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

4.3 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction*

mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $|f_n| \leq g$ p.p. sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0, \qquad \int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Le théorème d'Egorov, que nous rappelons maintenant, établit une relation entre la convergence presque partout et la convergence uniforme.

4.4 Théorème d'Egorov. *On suppose que Ω est de mesure finie et que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe $A \subset \Omega$ mesurable tel que :*

$$mes\ (A^c) < \delta, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

De même il est intéressant de savoir qu'il existe une certaine *relation* entre la notion de mesurabilité et celle de continuité. On dispose en effet du théorème de Lusin que voici (voir par exemple W. Rudin [145]) :

4.5 Théorème de Lusin. *Soient f une fonction mesurable définie sur Ω et $A \subset \Omega$ un ensemble mesurable et de mesure finie tel que $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\widetilde{f} \in C_c(\Omega)$ telle que :*

$$\text{mes}\left\{x \in \Omega\ ;\ f(x) \neq \widetilde{f}(x)\right\} < \varepsilon, \qquad \sup_{x\in\Omega} |\widetilde{f}(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

En particulier si $|f| \leq M$ p.p. sur Ω, il existe une suite $(f_n)_n$, telle que $f_n \in C_c(\Omega)$, $|f_n| \leq M$ et $f_n \to f$ p.p. sur Ω.

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers une fonction f. Comme d'après le lemme de Fatou on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|^p dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x)|^p dx \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p^p\ ,\end{aligned}$$

on voit que $f \in L^p(\Omega)$. La question que l'on peut se poser est de savoir s'il est possible d'avoir une précision supplémentaire sur la norme de f dans $L^p(\Omega)$. A ce propos on dispose d'un raffinement du lemme de Fatou, dû à H. Brezis & E. H. Lieb [33].

4.6 Lemme (Brezis-Lieb). *Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et :*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \big(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p\big).$$

Démonstration. Soit $M := \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p$. Remarquons en premier lieu que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε dépendant de p et de ε telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\big||s+1|^p - |s|^p - 1\big| \le \varepsilon |s|^p + C_\varepsilon. \tag{4.1}$$

En effet pour voir que cette inégalité est vraie, il suffit de remarquer que :

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} = 0.$$

On déduit de (4.1) que pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\big||a+b|^p - |a|^p - |b|^p\big| \le \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon\, |b|^p. \tag{4.2}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, posons :

$$u_n := \big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\big|, \qquad Z_n := \left(u_n - \varepsilon |f_n - f|^p\right)^+.$$

On sait que Z_n tend vers zéro p.p. et que, grâce à (4.2), $0 \le Z_n \le C_\varepsilon |f|^p$. Par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\|Z_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus on a presque partout : $0 \le u_n \le \varepsilon |f_n - f|^p + Z_n$, ce qui donne

$$\|u_n\|_1 \le \varepsilon \|f_n - f\|_p^p + \|Z_n\|_1 \le \varepsilon 2^p\, M^p + \|Z_n\|_1.$$

On en déduit finalement que $\|u_n\|_1$ tend vers zéro, ce qui établit le résultat annoncé. □

Un corollaire immédiat de ce résultat est le suivant :

4.7 Corollaire. *Soient $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$. On suppose que :*

$$f_n \to f \text{ p.p.} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Alors on a : $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Voici maintenant un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$. Remarquons que pour $1 < p < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ étant réflexifs, si la suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_i})_i$ convergeant dans $L^p(\Omega)$-faible vers une certaine fonction $g \in L^p(\Omega)$. Comme le montre le lemme suivant, si on sait que $f_n \to f$ p.p. on a nécessairement $g = f$.

4.8 Lemme. *Soient $1 < p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$-faible.*

Démonstration. En effet, d'après ce que nous venons de dire plus haut il existe une sous-suite $(f_{n_i})_i$ convergeant vers $g \in L^p(\Omega)$. Soit alors :

$$\Omega_n := \{x \in \Omega\ ;\ \forall k \ge n,\ |f_k(x) - f(x)| \le 1\}.$$

Si $n \ge 1$ est fixé et $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ est à support compact et telle que supp $(\varphi) \subset \Omega_n$, en utilisant le théorème de la convergence dominée on voit que :

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega f_{n_i}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on déduit que

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

pour toute fonction φ à support compact dans Ω. On en conclut que $g = f$, et par conséquent c'est toute la suite $(f_n)_n$ qui converge faiblement vers f. □

4.9 Remarque. Le résultat précédent ne subsiste pas si $p = 1$. Par exemple sur $\Omega :=]0,1[$, la suite :

$$f_n(x) := ne^{-nx},$$

tend vers zéro presque partout, est bornée dans $L^1(0,1)$ et $\int_0^1 f_n(x)dx$ converge vers 1 ; par conséquent $(f_n)_n$ ne contient aucune sous-suite convergeant dans L^1-faible. Notons aussi que pour $1 < p < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ étant uniformément convexes et réflexifs, si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ faible et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, alors on a $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ fort : en utilisant le lemme 4.8, on retrouve ainsi le résultat du corollaire 4.7. □

4.10 Remarque. Naturellement si une suite $(u_n)_n$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$, en général on ne peut rien dire de sa convergence presque partout. Par exemple la suite $u_n(x) := e^{inx}$ converge faiblement vers zéro dans $L^2(0,1)$, alors que $|u_n(x)| = 1$. □

Il est souvent utile de connaître une *réciproque partielle* du théorème de la convergence dominée (voir *Exercices* pour la démonstration).

4.11 Proposition. *Soient $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(f_{n_i})_i$ telles que :*

$$|f_{n_i}| \le g \quad p.p., \qquad f_{n_i} \to f \quad p.p.$$

Il faut bien noter que dans ce résultat on affirme uniquement l'existence d'une *sous-suite* convergeant presque partout, et on peut donner des exemples de suites convergentes dans $L^p(\Omega)$ qui ne convergent pas presque partout.

Une notion importante concernant une suite de fonctions intégrables est celle d'équi-intégrabilité que nous introduisons ici (cette notion est à comparer avec celle d'une famille équi-continue de fonctions).

4.12 Définition. *On dit que $(f_n)_n$, une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$, est* **équi-intégrable** *si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable A, de mesure finie et $\delta > 0$ tels que*

$$\text{(4.3)} \qquad \begin{cases} \forall n \ge 1, \quad \text{on a } \displaystyle\int_{A^c} |f_n(x)|dx < \varepsilon\ ; \\ \forall E \subset \Omega, \text{ mesurable avec } \operatorname{mes}(E) < \delta, \quad \displaystyle\int_E |f_n(x)|dx < \varepsilon. \end{cases}$$

On remarquera que dans le cas particulier où Ω est de mesure finie, l'équi-intégrabilité se réduit à la deuxième condition.

Intuitivement, par exemple lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, la première condition exprime le fait que la suite $(f_n)_n$ est *équi-négligeable* à l'infini, alors que la seconde condition exprime le fait que la famille de mesures $E \mapsto \int_E |f_n(x)|dx$ est équi-continue. Par exemple une famille finie $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est équi-intégrable. On vérifiera aussi que si $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites équi-intégrables, alors la réunion de ces deux suites (i.e. $(h_n)_{n\geq 1}$, avec $h_{2k} = f_k$ et $h_{2k+1} = g_k$) est équi-intégrable.

Le théorème de Vitali que nous allons rappeler maintenant est particulièrement utile pour les situations où on dispose d'une suite de fonctions convergeant presque partout et dont on souhaite montrer la convergence dans $L^1(\Omega)$.

4.13 Théorème de Vitali. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. Alors $(f_n)_n$ tend vers f dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si la suite $(f_n)_n$ est équi-intégrable.*

Démonstration. Notons avant tout que si $(f_n)_n$ est équi-intégrable, alors elle est bornée dans $L^1(\Omega)$. En effet si $\varepsilon > 0$ est fixé, et l'ensemble A et le nombre $\delta > 0$ sont donnés par (4.3), on peut recouvrir A par un nombre fini $m \geq 1$ d'ensembles mesurables de mesure δ. On a ainsi :

$$\int_\Omega |f_n(x)|dx \leq \int_A |f_n(x)|dx + \int_{A^c} |f_n(x)|dx \leq m\varepsilon + \varepsilon.$$

Par ailleurs grâce au théorème d'Egorov 4.4, il existe un ensemble mesurable $E \subset A$, avec $\mathrm{mes}(E^c) < \delta$, tel que f_n tend uniformément vers f sur E. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x) - f_n(x)|dx &\leq \int_E |f(x) - f_n(x)|dx + \int_{E^c} |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\quad + \int_{A^c} |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\leq \mathrm{mes}(E) \sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| + 4\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $\|f - f_n\|_1$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Réciproquement, soit une suite $(f_n)_n$ convergeant p.p. et dans $L^1(\Omega)$ vers f. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\|f - f_n\|_1 \leq \varepsilon/2$. De même il existe un ensemble mesurable A de mesure finie tel que $\int_{A^c} |f(x)|dx < \varepsilon/2$. On sait également qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable E tel que $\mathrm{mes}(E) < \delta$, on ait $\int_E |f(x)|dx < \varepsilon/2$. Par conséquent on voit que pour $n \geq n_0$ et de tels ensembles E, on a :

$$\begin{aligned}\int_{A^c} |f_n(x)|dx &\leq \|f - f_n\|_1 + \int_{A^c} |f(x)|dx < \varepsilon, \\ \int_E |f_n(x)|dx &\leq \|f - f_n\|_1 + \int_E |f(x)|dx < \varepsilon.\end{aligned}$$

On voit donc que $(f_n)_{n\geq n_0}$ est équi-intégrable et on déduit qu'il en est de même de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$. □

Comme exemple d'application du théorème de Vitali 4.13, on peut montrer (voir *Exercices*) cette variante du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, qui est parfois utile.

4.14 Corollaire. *Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ deux suites de fonctions de $L^1(\Omega)$ telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ p.p. On suppose de plus que :*

$$|f_n| \leq |g_n| \quad p.p., \qquad \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ et $|f| \leq |g|$ presque partout.

Pour finir ce paragraphe, nous rappelons le critère de compacité de Kolmogorov qui permet de démontrer en particulier des résultats du type du théorème de Rellich-Kondrachov (voir par exemple H. Brezis [28, théorème IV.25]). Ici et dans la suite on notera :

$$\tau_h(u) := u(\cdot + h)\,,$$

et la notation $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ signifie que Ω_0 est relativement compact dans Ω.

4.15 Théorème de Kolmogorov. *Soient $1 \leq p < \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et Ω_0 un ouvert tel que $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. On suppose qu'une famille bornée $(f_i)_{i\in I}$ de $L^p(\Omega)$ est telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ vérifiant $\delta < dist\,(\Omega_0, \Omega^c)$ et :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad |h| < \delta, \quad \forall i \in I, \quad on\ a\ \ \|\tau_h(f_i) - f_i\| \leq \varepsilon.$$

Alors la famille $(1_{\Omega_0} f_i)_{i\in I}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega_0)$.

5. Théorème de changement de variable

Nous montrons ici le théorème de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue. Dans ce paragraphe m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Nous commencerons par un résultat algébrique de décomposition des matrices (décomposition de Cartan). Rappelons qu'une matrice orthogonale est une matrice R telle que

$$R^*R = RR^* = I,$$

où I est la matrice identité.

5.1 Lemme. *Si T est une matrice inversible, il existe deux matrices orthogonales R_1 et R_2 et une matrice diagonale inversible D telles que $T = R_1 D R_2$.*

Démonstration. La matrice T^*T, étant auto-adjointe et définie positive, est diagonalisable et peut s'écrire sous la forme $T^*T = U^*\Delta U$ où U est une matrice orthogonale et Δ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. En posant

$$D := \Delta^{1/2}, \qquad R_2 := U, \qquad R_1 := TR_2^* D^{-1},$$

on vérifie sans peine que $R_1^* R_1 = I$ et $T = R_1 D R_2$. □

Dans un premier temps nous considérons des changements de variables linéaires.

5.2 Lemme. *Soit T une matrice carrée d'ordre N inversible. Si $\varphi(x) := Tx$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un borélien, alors on a*

$$m(\varphi(\Omega)) = |\det(T)|\, m(\Omega).$$

Démonstration. Posons $m_1(\Omega) := m(\varphi(\Omega))$. On vérifie que m_1 est une mesure invariante par translation, et par conséquent m_1 est un multiple de m i.e.

$$\exists\, c(T) > 0, \quad \forall\, \Omega \text{ mesurable}, \qquad m_1(\Omega) = c(T) m(\Omega). \tag{5.1}$$

On peut voir facilement que $c(T_1 T_2) = c(T_1) c(T_2)$, pour deux matrices inversibles T_1 et T_2. Si R est une matrice orthogonale, la boule unité de $\mathbb{R}^N$ est inchangée sous l'action de R, et par conséquent

$$c(R) = 1.$$

En prenant pour Ω le pavé $]0,1[^N$ et pour D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \lambda_i$, on vérifie que

$$c(D) = \prod_{i=1}^{N} |\lambda_i| = |\det(D)|.$$

Or, d'après le lemme 5.1, toute matrice inversible T a une décomposition sous la forme $T = R_1 D R_2$, où R_1 et R_2 sont des matrices orthogonales et D est une matrice diagonale. Dans (5.1) on a donc $c(T) = c(D) = |\det(D)| = |\det(T)|$ et le lemme est démontré. □

Nous montrons ensuite le théorème de changement de variable dans le cas régulier où la fonction de changement de variable est de classe C^2. Rappelons que lorsque ω et Ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et si φ de ω dans Ω est une fonction de classe C^1, une matrice représentant $\varphi'(x)$ est appelée *matrice jacobienne* de φ au point x, et on note $J_\varphi(x)$ le *jacobien* de φ, c'est à dire le déterminant de $\varphi'(x)$. On a donc :

$$J_\varphi(x) := \det \varphi'(x) = \det \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le N} \right].$$

Lorsque ω, Ω sont deux ouverts, on écrira $\omega \subset\subset \Omega$ pour signifier que $\overline{\omega}$ est compact et $\overline{\omega} \subset \Omega$.

5.3 Proposition. *Soient Ω et ω deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : \omega \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme de classe C^2. Alors en posant $J_\varphi(x) := \det(\varphi'(x))$, pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_\Omega f(y)dy = \int_\omega f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx. \tag{5.2}$$

Démonstration. Il suffit de montrer (5.2) pour des fonctions étagées, ou encore pour des fonctions $f := 1_{_A}$ où A est un borélien de Ω. Plus précisément, comme la tribu borélienne de ω est engendrée par les pavés $P \subset\subset \omega$ et que φ est un difféomorphisme de ω sur Ω, on voit que la tribu borélienne de Ω est engendrée par les ensembles $\varphi(P)$, lorsque P parcourt l'ensemble des pavés compacts de ω. En fin de compte, il suffit de montrer (5.2) lorsque la fonction f est la fonction indicatrice d'un ensemble $\varphi(P)$, où $P \subset\subset \omega$ est un pavé du type :

$$P := \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i[.$$

Soit $n \geq 1$ un entier et $h := 1/n$. En décomposant chaque intervalle $[a_i, b_i[$ en n intervalles disjoints de longueur $(b_i - a_i)h$, on obtient une décomposition de P en une réunion disjointe de pavés P_j :

$$P = \bigcup_{1\leq j\leq M} P_j, \qquad P_i \cap P_j = \varnothing \quad \text{si} \quad j \neq i, \qquad M := n^N.$$

Comme φ est bijective, on a

$$m(\varphi(P)) = \sum_{j=1}^{M} m(\varphi(P_j)). \tag{5.3}$$

Soient x_j le centre du pavé P_j et $T_j := \varphi'(x_j)$. Pour $x \in P_j$, il existe un $\xi \in P_j$ tel que :

$$\varphi(x) = \varphi(x_j) + T_j(x - x_j) + \frac{1}{2}\,\varphi''(\xi)(x - x_j, x - x_j). \tag{5.4}$$

Introduisons les notations suivantes : si $\delta > 0$ et Q est une partie de $\mathbb{R}^N$, on notera

$$\begin{cases} Q_\delta^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,;\, \mathrm{dist}(x, Q) \leq \delta\right\}, \\ Q_\delta^- = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,;\, \mathrm{dist}(x, Q^c) \geq \delta\right\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Posons ensuite $\lambda := \sup_{\xi\in P} \|\varphi''(\xi)\|$, et

$$\delta := \frac{\lambda}{2}\left[\max_{1\leq j\leq M} \mathrm{diam}\ (P_j)\right]^2, \qquad Q_j := \varphi(x_j) + T_j(P_j - x_j).$$

On voit alors que pour h assez petit (ou encore pour n assez grand) on a

$$(Q_j)_\delta^- \subset \varphi(P_j) \subset (Q_j)_\delta^+,$$

et comme il existe une constante C dépendant uniquement de P telle que $\delta \leq C\,h^2$, cela implique, puisque $m(Q_j) = m(T_jP_j)$:

$$\begin{aligned} |m(\varphi(P_j)) - m(T_jP_j)| &\leq m\left((Q_j)_\delta^+\right) - m\left((Q_j)_\delta^-\right) \\ &\leq C \cdot h^{N-1} \cdot \delta \leq C\,h^{N+1}. \end{aligned}$$

(Ici et dans la suite C désigne une constante dont on précise la dépendance ou l'indépendance par rapport à divers paramètres). En posant $J_\varphi(x_j) := \det \varphi'(x_j) = \det T_j$, et en utilisant le lemme (5.2) on obtient, pour une constante C indépendante de h :

$$-C\,h^{N+1} + |J_\varphi(x_j)|m(P_j) \leq m(\varphi(P_j)) \leq |J_\varphi(x_j)|m(P_j) + C\,h^{N+1}.$$

On a donc, en faisant la somme sur j :

$$-MCh^{N+1} \leq m(\varphi(P)) - \sum_{j=1}^{M} |J_\varphi(x_j)|m(P_j) \leq MCh^{N+1}. \tag{5.6}$$

D'autre part, en utilisant le théorème de la convergence dominée on obtient, en faisant tendre h vers zéro, ou n vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M} |J_\varphi(x_j)|m(P_j) &= \lim_{n\to+\infty} \int_\omega \sum_{j=1}^{M} 1_{P_j}(x)|J_\varphi(x_j)|dx \\ &= \int_\omega 1_P(x)|J_\varphi(x)|dx, \end{aligned}$$

Finalement, puisque $M\,h^{N+1} = h$, on déduit de (5.6) que

$$m(\varphi(P)) = \int_\omega 1_P(x)|J_\varphi(x)|dx\,,$$

et le théorème de changement de variable est montré lorsque φ est de classe C^2. □

Pour le cas général, si la fonction φ est de classe C^1, on l'approche par une suite de fonctions régulières pour obtenir le résultat suivant :

5.4 Théorème. *Soient Ω et ω deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : \omega \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme de classe C^1. Alors en définissant le jacobien de φ par $J_\varphi(x) := \det(\varphi'(x))$, on a pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$,*

$$\int_\Omega f(y)dy = \int_\omega f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|dx.$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de montrer le théorème pour le cas où la fonction f est la fonction indicatrice d'un ensemble $\varphi(P)$ où $P \subset\subset \omega$ est un pavé. Si $\varepsilon > 0$ est fixé et $Q := P_\varepsilon^+$ au sens de la notation (5.5), pour $\varepsilon > 0$ assez

petit on a $Q \subset \omega$ et il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de difféomorphismes de classe C^2 telle que :

$$\varphi_n \to \varphi \qquad \text{dans } C^1(Q).$$

On a donc, d'après la proposition 5.3,

$$m(\varphi_n(P)) = \int_\omega 1_{_P}(x)\,|J_{\varphi_n}(x)|dx.$$

Or il est clair que $m(\varphi_n(P)) \to m(\varphi(P))$ lorsque $n \to \infty$ et que (en utilisant le théorème de la convergence dominée)

$$\int_\omega 1_{_P}(x)\,|J_{\varphi_n}(x)|dx \to \int_\omega 1_{_P}(x)\,|J_{\varphi}(x)|dx.$$

Par conséquent on a $m(\varphi(P)) = \int_\omega 1_{_P}(x)\,|J_{\varphi}(x)|dx$ et le théorème est démontré. □

6. La mesure superficielle

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$ et F de ω dans $\mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1. On dit que F est un *plongement* si F et F' sont injectives (dire que $F'(x)$ est injective signifie que pour tout $x \in \omega$ la matrice $F'(x)$ est de rang $N-1$). Remarquons que si F est un plongement, alors $F'(x)^*F'(x)$ est une matrice carrée d'ordre $N-1$, définie positive et d'éléments génériques $(\partial_i F(x)|\partial_j F(x))$, où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$. La mesure superficielle est définie comme suit.

6.1 Définition. *Soient $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ un ouvert, F une fonction de classe C^1 de ω dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que F est un plongement et on note $S := \{F(x)\,; x \in \omega\}$. Si u est une fonction continue de S dans $\mathbb{R}$ et à support compact, on pose*

$$\int_S u(\sigma)d\sigma := \int_\omega u(F(x))\,(\det(F'(x)^*F'(x)))^{1/2}\,dx \tag{6.1}$$

La mesure $d\sigma$ est appelée la mesure superficielle sur S.

Pour que cette définition ait un intérêt, il faut naturellement qu'elle dépende uniquement de S et non pas du plongement F. Autrement dit il faut vérifier que si $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ est un ouvert et G de Ω dans $\mathbb{R}^N$ est un plongement tel que

$$S = \{F(x)\,;\ x \in \omega\} = \{G(x)\,;\ x \in \Omega\}\,,$$

alors les deux mesures superficielles définies à partir de F et de G coïncident.

6.2 Proposition. *La mesure superficielle donnée par la définition 6.1 sur S est indépendante du plongement F.*

Démonstration. En effet soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$ et G de Ω dans $\mathbb{R}^N$ un plongement tel que $S = G(\Omega)$. Alors $h := F^{-1} \circ G$ est un difféomorphisme de Ω sur ω. Soit maintenant u une fonction continue à support compact de S dans $\mathbb{R}$; en désignant par $d^*\sigma$ la mesure superficielle définie à l'aide de G on a

$$\int_S u(\sigma) d^*\sigma = \int_\Omega u(G(y)) \left[\det G'(y)^* G'(y)\right]^{1/2} dy.$$

Mais $G = F \circ h$, et $G'(y) = F'(h(y))h'(y)$; par conséquent en utilisant le théorème de changement de variable on peut écrire successivement

$$\begin{aligned}\int_S u(\sigma) d^*\sigma &= \int_\Omega u(F \circ h(y)) \left[\det F'(h(y))^* F'(h(y))\right]^{1/2} |\det h'(y)| dy \\ &= \int_\omega u(F(x)) \left[\det F'(x)^* F'(x)\right]^{1/2} dx \\ &= \int_S u(\sigma) d\sigma,\end{aligned}$$

où on a utilisé de façon naturelle le changement de variable

$$x := h(y), \qquad dy = |\det h'(y)|^{-1} dx. \qquad \square$$

Très souvent on est amené à intégrer une fonction sur le bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Dans ce cas le bord sera en général défini *localement* par un plongement et par conséquent la mesure superficielle aura une définition locale. Au paragraphe suivant, lors de la démonstration de la formule d'intégration par parties nous précisons ce que nous entendons par ouvert régulier et nous serons également amenés à utiliser la définition locale de la mesure superficielle.

7. La formule d'intégration par parties

Ici, et dans la suite, lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on désignera par $\partial\Omega$ son bord ou sa frontière. Si $x \in \mathbb{R}^N$, on écrira $x = (x', x_N)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

L'ouvert Ω est dit *de classe* C^k pour $k \geq 1$, si pour tout point $\sigma_0 \in \partial\Omega$ on peut trouver un voisinage ouvert ω_0 de σ_0, une boule $B(0,r) \subset \mathbb{R}^N$, une bijection $\Phi : B(0,r) \longrightarrow \omega_0$ et une application continue φ de $B(0,r) \cap \left(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}\right)$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\Phi(0) = \sigma_0, \ \ \Phi, \varphi \text{ et } \Phi^{-1} \text{ sont de classe } \ C^k \ ; \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \overline{\Omega} \cap \omega_0 = \Phi\left(B(0,r) \cap \left(\mathbb{R}^{N-1} \times [0, +\infty[\right)\right), \\ \partial\Omega \cap \omega_0 = \Phi\left(B(0,r) \cap \left(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}\right)\right) \ ; \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} \exists\, R_0 \text{ matrice de rotation et } \ b_0 \in \mathbb{R}^N \text{ tels que :} \\ \overline{\Omega} \cap \omega_0 \subset R_0\left(\left\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N \ ; \ y_N \geq \varphi(y')\right\}\right) + b_0 \ , \\ \partial\Omega \cap \omega_0 \subset R_0\left(\left\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N \ ; \ y_N = \varphi(y')\right\}\right) + b_0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Si la première condition de régularité (7.1) est remplacée par : Φ, φ et Φ^{-1} sont lipschitziennes (ou de classe $C^{k,\alpha}$), alors on dit que Ω est lipschitzien (ou de classe $C^{k,\alpha}$). Si Φ, φ et Φ^{-1} sont uniformément lipschitziennes on dira que Ω est uniformément lipschitzien. Cela est en particulier le cas si l'ouvert Ω est borné et lipschitzien, car dans ce cas sa frontière $\partial\Omega$ est compacte. Il faut aussi retenir que si Ω est un ouvert lipschitzien alors, localement, Ω est situé d'un seul côté de sa frontière. Parfois, par un abus de langage, au lieu de parler d'un ouvert de classe C^k (ou $C^{k,\alpha}$, ou lipschitzien) on parle d'un ouvert à frontière C^k. Mais il faut savoir qu'un même ensemble $\Gamma := \partial\Omega$ pouvant être la frontière de plusieurs ouverts, certains étant de part et d'autre de Γ, il faut éviter cet abus de langage qui peut engendrer des confusions.

7.1 Remarque. Pour les besoins qui vont apparaître plus bas, nous ferons également remarquer que si Ω est de classe C^1 au voisinage de $\sigma_0 = \Phi(0)$, alors l'application $F(y') := R_0(y', \varphi(y')) + b_0$, définie sur $B(0,r) \cap \big(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}\big)$, est un plongement. □

Avec les notations ci-dessus, lorsque Ω est de classe C^k, la *normale extérieure* à $\partial\Omega$ en un point $\sigma := R_0(y, \varphi(y)) + b_0$ de $\partial\Omega \cap \omega_0$ est donnée par

$$\mathbf{n}(\sigma) := R_0 \frac{(\nabla\varphi(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y)|^2}}. \tag{7.4}$$

Pour $1 \le i \le N$, on désigne par $\mathbf{n}_i(\sigma)$ la i-ème composante de $\mathbf{n}(\sigma)$, et on l'appelle parfois le i-ème *cosinus directeur* de $\partial\Omega$ en σ. On vérifiera que $\mathbf{n}(\sigma)$ dépend uniquement de $\partial\Omega$ et non pas du choix particulier de Φ et φ.

Enfin si u est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\partial\Omega$, la *dérivée normale* de u en $\sigma \in \partial\Omega$ est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma) := \nabla u(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) := (\nabla u(\sigma) | \mathbf{n}(\sigma)). \tag{7.5}$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la formule d'intégration par parties (ou formule de Stokes, ou encore formule de Green).

7.2 Théorème. *Soit Ω un ouvert de classe C^1. Si $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, pour $1 \le i \le N$ on a la formule d'intégration par parties :*

$$\int_\Omega \partial_i u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\, \mathbf{n}_i(\sigma) d\sigma. \tag{7.6}$$

De façon équivalente, si $\mathbf{u} \in C^1_c(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{div} \mathbf{u} := \sum_{i=1}^N \partial_i \mathbf{u}_i$, on a

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma. \tag{7.7}$$

Démonstration. Nous allons procéder en trois étapes.
1) Dans un premier temps, nous supposons que l'ouvert Ω et son bord sont définis par :

$$\Omega := \{(x', x_{_N})\,; x_{_N} > \varphi(x')\}\,,\ \partial\Omega := \{(x', x_{_N})\,; x_{_N} = \varphi(x')\}\,, \tag{7.8}$$

où $\varphi\ : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que $1 \leq i \leq N-1$, et soient :

$$g(x', x_{_N}) := \int_{-\infty}^{x_{_N}} \partial_i u(x', s)ds, \qquad f(x', x_{_N}) := \int_{-\infty}^{x_{_N}} u(x', s)ds.$$

On notera que u étant à support compact, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $|x'| \geq \lambda$, on ait : $g(x) = f(x) = 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_i u(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\varphi(x')}^{+\infty} \partial_i u(x', x_{_N})dx_{_N}\, dx' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x', \varphi(x'))dx'. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Par ailleurs, si $h(x') := f(x', \varphi(x'))$, puisque $1 \leq i \leq N-1$, on a :

$$\partial_i h(x') = g(x', \varphi(x')) + u(x', \varphi(x'))\partial_i\varphi(x'),$$

et, comme h est à support compact, on en conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_i h(x')dx' = 0,$$

de sorte que finalement :

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x', \varphi(x'))dx' &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x'))\partial_i\varphi(x')dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x'))\mathbf{n}_i(x', \varphi(x'))\,\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}dx' \\ &= \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Ici, outre la définition de $\mathbf{n}(\sigma)$ au moyen de φ, pour représenter $\partial\Omega$, nous avons utilisé le plongement défini par $F(x') := (x', \varphi(x'))$, et le fait que (voir *Exercices*) $\det F'(x')^* F'(x') = 1 + |\nabla\varphi(x')|^2$. En comparant (7.9) et (7.10), on voit que la formule d'intégration par parties est prouvée dans le cas où Ω est donné par (7.8) et $1 \leq i \leq N-1$.

En supposant toujours que Ω est donné par (7.8), mais que $i = N$, on voit, de façon un peu plus simple, du fait que le N-ème cosinus directeur de la normale est donnée par $\mathbf{n}_{_N}(x', \varphi(x')) = -(1 + |\nabla\varphi(x')|^2)^{-1/2}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_{_N} u(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\varphi(x')}^{+\infty} \partial_{_N} u(x', x_{_N})dx_{_N}\, dx' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x'))dx' \\ &= \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\mathbf{n}_{_N}(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Cela montre la formule d'intégration par parties (7.6), et de manière équivalente la relation (7.7), lorsque Ω est donné par (7.8).

2) Maintenant nous supposons que l'ouvert Ω est du type de celui donné par (7.8), mais que cet ouvert a subi une rotation et une translation. Plus précisément soient R une matrice de rotation et $b \in \mathbb{R}^N$ *fixés* et, la fonction φ et Ω étant comme plus haut dans (7.8), posons :

$$\Omega_0 := R\Omega + b, \qquad \partial\Omega_0 = R\partial\Omega + b. \tag{7.11}$$

Ici, en désignant par $d\sigma_0$ la mesure superficielle de $\partial\Omega_0$ et par $\mathbf{n}_0$ sa normale extérieure, il s'agit de voir que si $\mathbf{u} \in C^1_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, alors on a :

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\mathbf{u}(x))dx = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{u}(\sigma_0)\cdot\mathbf{n}_0(\sigma_0)d\sigma_0. \tag{7.12}$$

En posant $y := R^*(x-b) \in \Omega$ et $\mathbf{v}(y) := \mathbf{u}(Ry+b)$, on a $D\mathbf{u}(x) = D\mathbf{v}(y)R^*$. Mais puisque

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x) = \operatorname{tr}(D\mathbf{u}(x)) = \operatorname{tr}(D\mathbf{v}(y)R^*) = \operatorname{tr}(R^*D\mathbf{v}(y)),$$

(où on note $\operatorname{tr}(A)$ la trace d'une matrice A), on conclut que :

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\mathbf{u}(x))dx = \int_{\Omega} \operatorname{tr}(D\mathbf{v}(y)R^*)dy = \int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(D[R^*\mathbf{v}(y)]\right)dy.$$

Or, d'après la première partie de la démonstration :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{tr}(D[R^*\mathbf{v}(y)])dy &= \int_{\partial\Omega} [R^*\mathbf{v}(\sigma)]\cdot\mathbf{n}(\sigma)d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u}(R\sigma+b)]\cdot R\mathbf{n}(\sigma)d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{u}(\sigma_0)\cdot\mathbf{n_0}(\sigma_0)d\sigma_0,\end{aligned}$$

où on utilise le fait que la normale à $\partial\Omega_0$ est obtenue par rotation de la normale à $\partial\Omega$.

3) Pour montrer le théorème dans le cas général, en chaque point σ de $\partial\Omega$ on peut trouver un ouvert $\omega_{0,\sigma}$ et des fonctions Φ_σ et φ_σ remplissant les conditions (7.1)–(7.3). On peut alors recouvrir $\partial\Omega \cap \operatorname{supp}(u)$ par un nombre fini d'ouverts $\omega_k := \omega_{\sigma_k}$ pour $1 \le k \le n$. On considère ensuite une partition de l'unité $(\psi_k)_{0\le k\le n}$ telle que l'on ait $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset \omega_k$ et :

$$\text{si } k \ge 1,\ \operatorname{supp}(\psi_k) \text{ est compact}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) \equiv 1.$$

$$\overline{\omega}_0 \subset \Omega\ ; \qquad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{0\le k\le n} \omega_k\ ; \qquad \forall x \in \bigcup_{0\le k\le n} \overline{\omega_k}.$$

On peut donc écrire :

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega \partial_i(u(x)\psi_k(x))dx.$$

Or pour $1 \leq k \leq n$, la fonction $u\psi_k$ a son support dans ω_k et d'après la deuxième étape de la démonstration on a :

$$\int_\Omega \partial_i(u(x)\psi_k(x))dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\psi_k(\sigma)\,\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma.$$

Par ailleurs comme le support de $u\psi_0$ est compact et contenu dans Ω, on a :

$$\int_\Omega \partial_i(u(x)\psi_0(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(u(x)\psi_0(x))dx = 0.$$

Finalement puisque pour $\sigma \in \partial\Omega$ on a $\psi_0(\sigma) = 0$, on conclut la démonstration en faisant la somme de ces égalités pour k variant de zéro à n. □

7.3 Corollaire (formule de Green). *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et u, v deux fonctions de classe $C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on a :*

$$\int_\Omega [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)]\,dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\sigma)u(\sigma)\right] d\sigma\,,$$
$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma)v(\sigma)d\sigma\,.$$

Dans le paragraphe suivant nous allons introduire les espaces de Sobolev et généraliser la formule d'intégration par parties pour les fonctions qui admettent des dérivées dans un sens plus faible. L'intégration par parties est un outil fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles, ainsi que pour prouver la quasi-totalité des inégalités utilisées dans les méthodes variationnelles (inégalités de Sobolev, Gagliardo-Nirenberg, Poincaré, Hardy, Korn, etc.). Notons aussi que la formule d'intégration par parties peut s'étendre à des ouverts qui sont seulement lipschitziens, sachant qu'une fonction lipschitzienne φ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable presque partout et sa dérivée est dans L^∞ (voir par exemple E. Stein [153, chapter V, § 6.2]).

8. Espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe nous regroupons, pour faciliter la tâche du lecteur, un certain nombre de résultats concernant les espaces de Sobolev qui nous seront utiles dans la suite. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, ou pour la démonstration des résultats que nous annonçons ici, on pourra consulter par exemple H. Brezis [28, chapitres 8 et 9], R.A. Adams [2], J.L. Lions & E. Magenes [102], V.G. Maz'ja [115] et E. Stein [153, chapter V]. En particulier les livres de R.A. Adams et de V.G. Maz'ja sont des références générales pour toutes les questions concernant les espaces de Sobolev.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq i \leq N$. Une fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a une i-ème *dérivée faible* dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ on ait

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Si f_i est donnée par la relation ci-dessus, on posera

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i} := f_i.$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on note $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{_N}$ la longueur de α et on note $\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_{_N}^{\alpha_{_N}} u$. Dans la suite $\partial^\alpha u$ désigne la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega)\,; \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}. \tag{8.1}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ étant muni de la norme $\|u\|_{_{L^p(\Omega)}} := \|u\|_p$ (où pour $1 \leq p < \infty$ on note $\|u\|_p^p := \int_\Omega |u(x)|^p dx$), on munit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{m,p} := \|u\|_{_{W^{m,p}(\Omega)}} := \|u\|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}. \tag{8.2}$$

On montre alors que $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et on voit que si $0 \leq m \leq n$ l'injection $W^{n,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ est continue. En posant :

$$\|D^m u\|_p := \left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p},$$

on obtient une semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ et on peut montrer que $u \mapsto \|u\|_p + \|D^m u\|_p$ définit une norme, équivalente à celle que l'on vient de définir en (8.2), lorsque Ω est suffisamment régulier.

Dans le cas particulier où $p = 2$, traditionnellement les espaces de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ sont notés $H^m(\Omega)$ et on les appelle parfois *"espaces d'énergie"*. Dans le cas particulier où l'ouvert Ω est l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$, en utilisant la transformation de Fourier on peut voir aisément que :

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N)\ ;\ (1 + |\cdot|^2)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \tag{8.3}$$

où $\widehat{u}$ est la transformée de Fourier de u et $|\cdot|$ désigne la fonction $\xi \mapsto |\xi|$. On montre aussi que la norme $\|(1+|\cdot|^2)^{m/2}\widehat{u}\|_2$ est équivalente à $\|u\|_{W^{m,2}(\mathbb{R}^N)}$ (pour cette approche voir J.L. Lions & E. Magenes [102] et *Exercices*).

De même on peut montrer (voir E. Stein [153, chapter V, § 6.2] et *Exercices*) que les fonctions de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ sont précisément les fonctions bornées et lipschitziennes sur $\mathbb{R}^N$. En particulier une fonction lipchitzienne sur $\mathbb{R}^N$ est presque

partout dérivable et sa dérivée est dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ces résultats sont valides pour $W^{1,\infty}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné et de classe C^1 ou lipchitzien.

Les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ peuvent être caractérisées de la façon suivante. Tout d'abord si u est un élément de $L^p(\Omega)$, notons par $\widetilde{u}$ le prolongement par zéro de u, c'est à dire :

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega, \end{cases} \tag{8.4}$$

puis, pour $h \in \mathbb{R}^N$, posons :

$$\tau_h(u)(x) := \widetilde{u}(x+h).$$

On peut alors énoncer le résultat suivant, pour la caractérisation des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ (voir par exemple H. Brezis [28, théorème IX.3]). Précisons que pour $1 \le p \le \infty$ on désigne par p' son conjugué de Hölder i.e. $p' := \frac{p}{p-1}$.

8.1 Proposition. *Soient $1 < p \le \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
(ii) *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $i \gtreqless 1 \atop \lesseqgtr N$ et tout $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ on ait :*

$$\left| \int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) dx \right| \le C \, \|\varphi\|_{p'}.$$

(iii) *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ω ouvert relativement compact dans Ω et tout $h \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, on ait :*

$$\|\tau_h(u) - u\|_{L^p(\omega)} \le C \, |h|.$$

Par ailleurs, si $p = 1$ les propriétés **(ii)** *et* **(iii)** *sont équivalentes, et* **(i)** *implique* **(ii)**.

On notera que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la meilleure (i.e. la plus petite) constante C dans (ii) est précisément $\|\partial_i u\|_p$, alors que la meilleure constante dans (iii) est $\|\nabla u\|_p$.

L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathscr{D}(\Omega)$) désignant l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact contenu dans Ω, on note, pour $p \ge 1$ *et* $p < \infty$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\,W^{m,p}(\Omega)}. \tag{8.5}$$

(Naturellement $H_0^m(\Omega)$ n'est autre que $W_0^{m,2}(\Omega)$). En ce qui concerne la caractérisation des fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on dispose du résultat suivant.

8.2 Proposition. *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
(ii) *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $i \gtrless \frac{1}{N}$ et tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ on ait :*

$$\left| \int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) dx \right| \leq C \, \|\varphi\|_{p'}.$$

(iii) $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *(rappelons que $\widetilde{u}$ est défini en (8.4)).*
Par ailleurs, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\partial_i \widetilde{u} = \widetilde{\partial_i u}$.

8.3 Remarque. Il faut retenir que $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Dans le cas général où $m \geq 2$, pour caractériser l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ ou $W_0^{m,p}(\Omega)$, on peut obtenir un résultat semblable en appliquant les propositions 8.1 et 8.2 aux dérivées d'ordre $k \leq m-1$. Il est important de noter que la définition des espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme *l'adhérence* de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ nécessite que $p < \infty$. □

Comme, pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$, on peut identifier le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $\mathscr{D}'(\Omega)$ (le dual de $L^p(\Omega)$ étant identifié à $L^{p'}(\Omega)$). On note :

$$W^{-m,p'}(\Omega) := \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)'.$$

(On notera $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$). Les éléments de $W^{-m,p'}(\Omega)$ sont caractérisés par la proposition suivante (voir par exemple H. Brezis [28, proposition VIII.13] pour adapter la démonstration) :

8.4 Proposition. *Dire qu'une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est un élément de $W^{-m,p'}(\Omega)$ équivaut à dire qu'il existe, pour des multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^N$ avec $|\alpha| \leq m$, des fonctions $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ telles que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$:*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx,$$

et $\|T\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{p'}$. De plus si Ω est borné on peut prendre $f_0 = 0$.

Si cela avait un sens, *"intuitivement"*, $W_0^{m,p}(\Omega)$ serait l'ensemble des fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ qui, d'une certaine manière, *s'annulent* sur le bord $\partial\Omega$. En effet de façon plus précise on a la propriété suivante (voir par exemple H. Brezis [28, théorème IX.17]) :

8.5 Proposition. *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. On considère une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Alors :*

$$u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \iff u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par exemple si $N := 1$ et $\Omega :=]0,1[$, on peut voir que si $u \in W^{1,p}(0,1)$, alors u est continue sur $[0,1]$ et on a $u \in W_0^{1,p}(0,1)$ si et seulement si $u(0) = u(1) = 0$.

Cependant si l'ouvert Ω n'est pas régulier, on ne peut pas parler de la *restriction* de u au bord, et dire que u est nulle sur le bord n'a pas de sens. En réalité, lorsque l'ouvert Ω est de classe C^1, on peut donner un sens à la notion de *restriction sur le bord* d'une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$: c'est la notion de *trace* que nous allons voir dans un instant, après avoir vu que si on fait des hypothèses adéquates sur la régularité de l'ouvert, les fonctions régulières sont denses dans $W^{1,p}(\Omega)$ (le cas $m \geq 2$ peut se traiter par applications successives de ce résultat).

En tenant compte de la mise en garde précédente, on utilise souvent une version faible de la notion de *restriction* sur le bord $\partial\Omega$ d'une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$, en utilisant la définition suivante.

8.6 Définition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. On dit que $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$ au sens de $W^{1,p}(\Omega)$, si on a $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

De manière générale, pour étudier les propriétés des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ il est important de faire des hypothèses convenables sur la régularité de l'ouvert Ω, au sens du paragraphe § 7. D'ailleurs, comme nous l'avons vu au paragraphe § 3, cela est le cas même lorsqu'on est en présence des fonctions continues höldériennes. Pour des contre-exemples concernant les résultats qui suivent, lorsque Ω n'est pas suffisamment régulier, voir le livre de R.A. Adams [2] (et aussi les *Exercices*).

On montre la plupart des résultats de régularité concernant les espaces de Sobolev en supposant d'abord que $\Omega := \mathbb{R}^N$. Puis, pour le cas général, on construit un *opérateur de prolongement* qui à une fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$ fait correspondre un prolongement $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour une constante C dépendant uniquement de Ω, m, p, on ait $\widetilde{u}_{|\Omega} = u$ et

$$\|\widetilde{u}\|_{0,p,\mathbb{R}^N} \leq C\|u\|_{0,p,\Omega}, \qquad \text{et} \qquad \|\widetilde{u}\|_{m,p,\mathbb{R}^N} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Comme nous l'avons signalé à la proposition 8.2, c'est le prolongement par zéro qui est l'opérateur de prolongement adéquat dans le cas des fonctions $W_0^{1,p}(\Omega)$. L'ouvert le plus simple permettant de construire assez facilement un opérateur de prolongement est le demi-espace $\Omega := \mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1} \times]0, \infty[$ (cf. *Exercices*). Dans un cadre plus général, pour construire cet opérateur, du moins lorsque $\partial\Omega$ est borné, on peut par exemple supposer que l'ouvert Ω est de classe C^m (mais ce n'est pas la régularité minimale que l'on puisse exiger).

Comme on peut le voir assez facilement (voir *Exercices*), les techniques classiques de troncature et de régularisation permettent de montrer que l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $m \geq 1$ et $p < \infty$. Lorsque Ω est suffisamment régulier pour que l'on puisse construire un opérateur de prolongement, on en déduit le résultat de densité (ii) de la proposition suivante :

8.7 Proposition. (i) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. On note $X_{m,p}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega)\ ;\ \|\varphi\|_{m,p,\Omega} < \infty\}$. Alors $X_{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*
(ii) *Soient Ω un ouvert de classe C^m à frontière bornée et $1 \leq p < \infty$. Alors pour toute fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$ il existe une suite φ_n de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que si u_n est la restriction de φ_n sur Ω, on ait :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u-u_n\|_{m,p,\Omega} = 0 \quad \textit{et, si } |\alpha| \le m, \quad \partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u \ \textit{ p.p. sur } \Omega.$$

La propriété de densité (i) du théorème est dûe à N. Meyers & J. Serrin [116] (voir aussi R.A. Adams [2, theorem 3.16]). Il faut noter que cette proprité n'est pas vraie pour $p=\infty$: par exemple si $\Omega :=]-1,+1[$ et $u(x) := |x|$, évidemment $u \in W^{1,\infty}(-1,+1)$ mais si $\varphi \in C^1(-1,+1)$ on a $\|u'-\varphi'\|_\infty \ge 1/2$.

Grâce au résultat de densité (ii) de la propostion 8.7, on peut voir que si Ω est de classe C^1, alors les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ admettent une *trace* sur $\partial\Omega$. De façon plus précise, l'application

$$\gamma_0(u) := u_{|\partial\Omega}, \tag{8.6}$$

définie sur $C^1(\overline{\Omega})$, vérifie une inégalité du type :

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{1,p,\Omega}$$

et par conséquent se prolonge, par densité, en une application continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ (cf. *Exercices*). Il faut aussi savoir que cette application *n'est ni surjective*, *ni injective* et que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est précisément le noyau de γ_0 :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \ker\,(\gamma_0).$$

L'image de γ_0 est également un espace de Sobolev (voir R.A. Adams [2, chapter 7]) et on note :

$$W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) := \gamma_0\left(W^{m,p}(\Omega)\right).$$

De même, en remarquant que si $u \in W^{2,p}(\Omega)$, les dérivées de u sont dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut définir la *dérivée normale* de u :

$$\gamma_1(u) := \gamma_0\left(\nabla u\right)\cdot \mathbf{n} =: \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,, \tag{8.7}$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $\gamma_0(\nabla u)$ est le vecteur de composantes $\gamma_0(\partial_i u)$ pour $1 \le i \le N$. On a alors le résultat suivant qu'il est utile de connaître (voir R.A. Adams [2, theorem 7.53]) :

8.8 Proposition. *Soient Ω un ouvert de classe C^2 à frontière bornée et $1 < p < \infty$. Les opérateurs de trace γ_0 et γ_1 étant définis en (8.6) et (8.7), pour $u \in W^{2,p}(\Omega)$ on pose $\gamma(u) := (\gamma_0(u), \gamma_1(u))$. Alors :*

$$\gamma\ : W^{2,p}(\Omega)/\ker\,(\gamma) \longrightarrow W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Une fois que l'on sait que les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ admettent une trace sur $\partial\Omega$, en utilisant la formule d'intégration par parties que nous avons établie au paragraphe § 7, on peut montrer la formule d'intégration par parties pour des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$.

8.9 Proposition. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 à frontière bornée. Alors pour toute fonction $u \in W^{1,1}(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma.$$

Il faut remarquer qu'ici, dans un but de simplification, nous avons supposé que l'ouvert Ω est à frontière bornée et de classe C^1 ; cependant pour des ouverts plus généraux le même résultat subsiste pourvu que l'on dispose d'un théorème de densité de $C^1_c(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,1}(\Omega)$.

La proposition 8.8 et la formule d'intégration par parties permettent de donner un sens à certains problèmes aux limites non homogènes, sans que l'on ait à faire des hypothèses de régularité parfois trop contraignantes. Par exemple si Ω est un ouvert borné de classe C^1 et si $u \in L^2(\Omega)$ est tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors on peut donner un sens à $\gamma_0(u)$ et $\gamma_1(u)$. Plus précisément (voir par exemple J.L. Lions [100, pages 168–171]) en désignant par

$$H(\Delta;\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}$$

l'espace de Hilbert muni de la norme $u \mapsto \left(\|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2\right)^{1/2}$, on peut montrer que l'application γ de la proposition 8.8 (lorsque $p = 2$) se prolonge en une application linéaire continue de $H(\Delta;\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-3/2}(\partial\Omega)$ où $H^{-\sigma}(\partial\Omega)$ désigne le dual de $H^\sigma(\partial\Omega)$ (comme toujours on identifie $L^2(\partial\Omega)$ et son dual). On peut même donner un sens à $\gamma_0(u)$, comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, pourvu que $u \in L^2(\Omega)$ et $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$.

Un résultat fondamental concernant les espaces de Sobolev est l'inégalité, ou le théorème d'injection, de Sobolev que nous allons voir maintenant.

8.10 Proposition. *Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$.*
(i) *Si $mp < N$, on pose $p^{*m} := \frac{pN}{N-mp}$. Alors on a $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément il existe une constante $C(m,p,N) > 0$ telle que pour tout $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ on ait l'inégalité de Sobolev :*

$$\|u\|_{p^{*m}} \leq C(m,p,N)\,\|D^m u\|_p. \tag{8.8}$$

(ii) *Si $mp = N$, pour tout $q \geq p$ il existe une constante $C(m,q,N)$ telle que pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on ait :*

$$\|u\|_q \leq C(m,q,N)\,\|u\|_{m,p}.$$

(iii) *Si $mp > N$, en posant $\alpha := 1 - \frac{N}{mp}$, on a $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}_0(\mathbb{R}^N)$ et il existe une constante $C(m,p,N)$ telle que pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on ait l'inégalité de Morrey-Sobolev :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |u(x) - u(y)| \leq C(m,p,N)\,\|u\|_{m,p}\,|x-y|^\alpha.$$

(iv) *Si Ω est un ouvert de classe C^m à frontière bornée, les propriétés (ii) et (iii) sont vraies en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par Ω et la constante C par une constante $C(m,p,\Omega)$, alors que si $mp<N$, il existe une constante $C(m,p,\Omega)$ telle que :*

$$\|u\|_{p^*m} \le C(m,p,\Omega)\,\|u\|_{m,p,\Omega}\ .$$

8.11 Remarque. Les inégalités de Sobolev sont fortement liées aux propriétés *régularisantes* du semi-groupe de la chaleur. Rappelons (voir par exemple K. Yosida [165, chapter IX] ou Th. Cazenave & A. Haraux [40]) que l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N\times]0,+\infty[,\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

admet une solution unique pour tout $u_0\in L^p(\mathbb{R}^N)$ donnée (ici $1\le p\le\infty$), et on a $\|u(\cdot,t)\|_p\le\|u_0\|_p$. En réalité on peut voir facilement que si $u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $u(x,t):=G(\cdot,t)*u_0$ où $G(x,t):=(4\pi t)^{-N/2}\exp(-|x|^2/4t)$ est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$, ce qui implique

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le (4\pi t)^{-N/2}\|u_0\|_1. \tag{8.9}$$

En notant $S(t)u_0 := u(\cdot,t)$, on a ainsi un semi-groupe $(S(t))_{t\ge0}$ qui envoie $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ à $t>0$ (on dit que $S(t)$ est un *semi-groupe ultracontractif*). Or on peut montrer (voir M. Fukushima [68] et N.Th. Varopoulos [162]) que si $N>2$ l'inégalité (8.9) est équivalente à l'inégalité de Sobolev

$$\|\varphi\|^2_{2N/(N-2)} \le C(N)\|\nabla\varphi\|_2^2,$$

pour $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. De même l'inégalité de Nash, i.e.

$$\|\varphi\|_2^{(2N+4)/N} \le C_2(N)\|\varphi\|_1^{4/N}\,\|\nabla\varphi\|_2^2,$$

est équivalente à l'inégalité (8.9) (et peut être déduite de façon évidente de l'inégalité de Sobolev). De manière générale soit $(A,D(A))$ un opérateur non borné et auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ au sens du paragraphe § 9, qui engendre un semi-groupe $S(t)$ (voir le livre de Th. Cazenave & A. Haraux [40] pour plus de précision). Supposons que pour $1\le p\le\infty$ le semi-groupe $S(t)$ soit un semi-groupe de contractions dans les espaces $L^p(\Omega)$ (en fait Ω pourrait être n'importe quel espace mesuré), et que les fonctions positives soient préservées par $S(t)$. Alors si, pour un réel $\mu>0$, on considère les trois propriétés suivantes (où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire L^2) :

$$\forall t>0,\quad \forall f\in L^1(\Omega),\qquad \|S(t)f\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2}\|f\|_1, \tag{8.10}$$

$$\forall\varphi\in D(A)\cap L^1(\Omega),\qquad \|\varphi\|_2^{(2\mu+4)/\mu} \le c_2\|\varphi\|_1^{4/\mu}\,(A\varphi|\varphi), \tag{8.11}$$

$$\forall\varphi\in D(A),\qquad \|\varphi\|^2_{2\mu/(\mu-2)} \le c_3(A\varphi|\varphi), \tag{8.12}$$

on peut montrer que (8.10) est équivalente à (8.11) (voir J. Nash [122] et E.B. Fabes & D.W. Strook [63]), et que ces deux inégalités sont équivalentes

à (8.12) lorsque $\mu > 2$ (voir M. Fukushima [68] et N.Th. Varopoulos [162]). Cela est surtout intéressant dans les situations où on ne peut pas montrer les inégalités de Sobolev par un calcul direct (ou bien lorsque l'on ne peut pas montrer la propriété d'ultracontractivité (8.10) par un calcul explicite, comme on peut le faire pour l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$). Pour plus de précisions sur toutes ces questions, voir le livre de E.B. Davies [55, chapter 2] où les inégalités de Sobolev logarithmiques sont également traitées. □

Les inégalités de la proposition 8.10 impliquent l'existence d'injections continues des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ dans des espaces $L^q(\Omega)$ ou $C^{0,\alpha}(\Omega)$, suivant les valeurs respectives de m, p et N. En utilisant l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder, on obtient les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (en réalité la formulation d'origine de ces dernières est plus précise que celle que nous donnons ici. Voir Gagliardo [69], L. Nirenberg [123], et *Exercices*).

8.12 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \le p \le N$ et $1 \le r \le \infty$. Il existe une constante $C(p, \theta, N)$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ on ait :*

$$\|u\|_q \le C \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^{\theta} ,$$

où $0 \le \theta \le 1$, avec $\theta > 0$ si $p = N \ge 2$, et :

$$\frac{1}{q} := \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{r} .$$

Pour se souvenir de la relation qui existe entre les divers exposants de cette inégalité, on pourra procéder comme suit. Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda > 0$, on pose :

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x),$$

et on écrit l'inégalité pour la fonction u_λ. Ensuite on calcule les différentes normes qui interviennent dans l'inégalité en fonction de celles de u et de λ :

$$\|u_\lambda\|_q = \lambda^{\frac{-N}{q}} \|u\|_q, \quad \|u_\lambda\|_r = \lambda^{\frac{-N}{r}} \|u\|_r, \quad \|\nabla u_\lambda\|_p = \lambda^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p.$$

Si l'inégalité est vraie pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et tout $\lambda > 0$, on doit nécessairement avoir :

$$\frac{N}{q} = \theta \left(\frac{N}{p} - 1 \right) + \frac{(1-\theta)N}{r}.$$

Le même argument montre que si $mp < N$, alors $p^{*m} := \frac{pN}{N-mp}$ est le seul exposant q tel que pour tout $u \in C_c^m(\mathbb{R}^N)$, on puisse avoir $\|u\|_{q,\mathbb{R}^N} \le C \|D^m u\|_{p,\mathbb{R}^N}$.

8.13 Remarque. Lorsque $p < N$, on pose $p^* := p^{*1} := \frac{pN}{N-p}$. L'inégalité de Sobolev montre que si par exemple Ω est de classe C^1 à frontière bornée, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est contenu dans $L^{p^*}(\Omega)$ avec injection continue. Toujours en supposant que $p < N$, mais sans *aucune hypothèse de régularité* sur l'ouvert Ω, la définition même de $W_0^{1,p}(\Omega)$, comme adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$, montre que si C est la constante intervenant dans la proposition 8.10 (i), on a :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad \|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \,. \tag{8.13}$$

En effet il suffit de passer à la limite dans (8.8) en se restreignant aux fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Toutefois, comme nous le verrons par la suite, la meilleure constante dans cette inégalité est indépendante de l'ouvert Ω et dépend uniquement de p et de N. Naturellement cette remarque est également valable pour $m \geq 2$.

Cependant il faut bien noter que les injections de Sobolev pour les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ dépendent, à travers un résultat de prolongement, de la régularité de l'ouvert Ω. De fait, on peut donner des exemples d'ouverts Ω *non réguliers* en un seul point tels que $W^{m,p}(\Omega)$ ne soit contenu dans *aucun* espace $L^q(\Omega)$ pour $q > p$ (voir R.A. Adams [2, theorem 5.32]). De même si Ω est un ouvert non borné de mesure finie, alors $W^{m,p}(\Omega)$ n'est contenu dans aucun $L^q(\Omega)$ avec $q > p$ (voir [2, theorem 5.30]). □

Quand Ω est un ouvert borné, on voit facilement que l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg ne peut pas être vraie pour les fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (car les constantes sont dans cet espace). Cependant en utilisant un théorème de prolongement on peut montrer le résultat suivant (voir *Exercices* pour la démonstration).

8.14 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné connexe de classe C^1, $1 \leq p \leq N$ et $1 \leq r \leq \infty$. Il existe une constante C dépendant de p, θ, Ω telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ on ait :*

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_r^{1-\theta} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\theta} \,,$$

où $0 \leq \theta \leq 1$, avec $\theta > 0$ si $p = N \geq 2$, et :

$$\frac{1}{q} := \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{r} \,.$$

Par ailleurs si $m(u) := \mathrm{mes}(\omega)^{-1} \int_\omega u(x)dx$ est la moyenne de u sur $\omega \subset \Omega$ et $\mathrm{mes}(\omega) > 0$, avec les notations ci-dessus, pour une constante C dépendant de $p, \theta, \omega, \Omega$, on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u - m(u)\|_q \leq C \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^{\theta} \,.$$

On retiendra aussi que dans le cas limite où $p = N$, on a $p^* = \infty$, mais dès que $N \geq 2$, l'espace $W_0^{1,N}(\Omega)$ *n'est pas contenu* dans $L^\infty(\Omega)$, même si l'inclusion $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est vraie pour tout $q \geq p$ (voir *Exercices*). En fait, lorsque Ω est borné, on peut montrer que (voir R.A. Adams [2, theorem 8.25]) :

$$\|u\|_{L^q} \leq C(N) \,\mathrm{mes}(\Omega)\, q^{1-\frac{1}{N}} \|u\|_{1,N,\Omega}.$$

En utilisant le développement en série de $s \mapsto \exp(s^{\frac{N}{N-1}})$, et cette dernière estimation, on peut établir l'inégalité de Trudinger-Moser :

8.15 Proposition (Trudinger-Moser). *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Il existe une constante β dépendant de N et de mes (Ω) telle que pour tout $u \in W^{1,N}(\Omega)$ on ait :*

$$\int_\Omega \exp\left[\left(\frac{|u(x)|}{\beta\|u\|_{1,N,\Omega}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right] dx \leq 1. \tag{8.14}$$

De même en posant

$$\Phi(s) := \exp(s^{\frac{N}{N-1}}) - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{j!} s^{\frac{jN}{N-1}},$$

il existe une constante β dépendant uniquement de N telle que pour tout $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\beta\|\nabla u\|_N}\right) dx \leq 1. \tag{8.15}$$

Un autre résultat particulièrement important dans l'étude des méthodes variationnelles est le théorème de Rellich-Kondrachov qui concerne la compacité de l'injection des espaces de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$. Nous énonçons ce résultat pour le cas $m = 1$, mais comme nous l'avons signalé plus haut le cas général s'en déduit facilement. Pour la démonstration voir H. Brezis [28, théorème IX.16], D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74 § 7.10], ou *Exercices*. Rappelons que si $p < N$ on a défini l'exposant de Sobolev p^* par :

$$p^* := \frac{pN}{N-p}.$$

8.16 Théorème (Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.*
(i) *Si $p < N$, alors pour tout $q \geq 1$ tel que $q < p^*$, l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.*
(ii) *Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.*
(iii) *Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est compacte.*
(iv) *Lorsque Ω est un ouvert borné de classe C^1, les résultats ci-dessus sont vrais en remplaçant $W_0^{1,p}(\Omega)$ par $W^{1,p}(\Omega)$.*
(v) *Lorsque $N = 1$, l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est continue et non compacte, mais toute suite bornée $(u_n)_n$ contient une sous-suite $(u_{n_j})_j$ telle que pour tout $x \in \Omega$, la suite $\left(u_{n_j}(x)\right)_j$ est convergente.*

8.17 Remarque. Les résultats de compacité que nous venons de donner sont optimaux dans le sens où, bien que l'injection continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ (ou dans $C^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$ lorsque $p > N$) existe, cette injection n'est pas compacte. En effet, dans le cas où $p < N$, en supposant que Ω est un ouvert borné et $0 \in \Omega$,

considérons une boule $B(0,R) \subset\subset \Omega$, une fonction $\varphi \in C_c^\infty(B(0,R))$ et, pour $\lambda > 0$ destiné à tendre vers l'infini, définissons la famille de fonctions φ_λ par :

$$\varphi_\lambda(x) := \lambda^{\frac{N}{p}-1}\varphi(\lambda x).$$

On vérifie que la famille $(\varphi_\lambda)_\lambda$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et que :

$$\|\varphi_\lambda\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\varphi_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \lambda^\theta \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \qquad \text{avec } \theta := \frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1.$$

Par conséquent si $q < p^*$, on a $\theta < 0$ et φ_λ tend vers zéro dans $L^q(\Omega)$ lorsque $\lambda \to +\infty$. Si $(\varphi_\lambda)_\lambda$ avait une valeur d'adhérence dans $L^{p^*}(\Omega)$, elle ne pourrait être que la fonction nulle. Or si $\varphi \not\equiv 0$, pour tout $\lambda > 1$ on a $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda) \subset B(0, \frac{R}{\lambda}) \subset \Omega$ et : $\|\varphi_\lambda\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} > 0$.

De même, lorsque Ω est non borné, en général l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ n'est pas compacte. Par exemple si $\Omega := \mathbb{R}^N$ (ou un ouvert invariant par translation dans une direction) et si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $|x_n| \to +\infty$, la suite :

$$u_n(x) := \varphi(x + x_n)$$

vérifie $\|u_n\|_{1,p} = \|\varphi\|_{1,p}$, alors que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$-faible et $\|u_n\|_q = \|\varphi\|_q > 0$. Par conséquent $(u_n)_n$ ne peut être relativement compacte dans L^q, pour aucun q.

Il faut cependant remarquer que la perte de compacité dans le cas de l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ est de nature *locale*, alors que dans le cas où l'ouvert Ω est non-borné (par exemple l'espace tout entier) la perte de compacité provient de l'invariance du domaine par translation, et de fait si Ω est un ouvert quelconque et $p < N$ alors pour tout $q < p^*$ et tout ouvert *borné* ω l'injection :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\omega)$$

est *compacte*. On exprime ce fait en disant que l'injection $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est compacte pour $q < p^*$, alors qu'elle ne l'est pas si $q = p^*$. □

Dans certains cas, la norme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être simplifiée grâce à l'inégalité de Poincaré. On dira qu'un ouvert Ω est *borné dans une direction* s'il existe un vecteur $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$, avec $(\mathbf{e}|\mathbf{e}) = 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \Omega$ on a $(x|\mathbf{e}) \in]a,b[$.

8.18 Proposition (inégalité de Poincaré). *On suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:*

$$\|u\|_p \leq C \, \|\nabla u\|_p. \tag{8.16}$$

L'inégalité (8.16) est vraie si on suppose seulement que Ω est de mesure finie.

Démonstration. Si Ω est borné dans une direction, on peut supposer sans perte de généralité qu'il est contenu dans $\mathbb{R}^{N-1} \times]0,a[$. Ainsi, en notant $(x', x_N) := x \in \mathbb{R}^N$, pour $u \in C_c^1(\Omega)$ on peut écrire :

$$|u(x', x_N)|^p = p \int_0^{x_N} |u(x', t)|^{p-2} u(x', t) \partial_N u(x', t) dt$$
$$\leq p \int_0^a |u(x', t)|^{p-1} |\partial_N u(x', t)| dt.$$

En intégrant d'abord en x_N sur $]0, a[$ puis en $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, et utilisant le fait que le support de u est contenu dans Ω, on obtient :

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq pa \int_\Omega |u(x)|^{p-1} |\partial_N u(x)| dx \leq pa \|u\|_p^{p-1} \|\partial_N u\|_p,$$

où, pour la dernière estimation, on a utilisé l'inégalité de Hölder.

Lorsque Ω est de mesure finie, pour $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ on part de l'inégalité de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$ (où $1^* := \frac{N}{N-1}$) :

$$\|\varphi\|_{L^{1^*}} \leq C(N) \|\nabla \varphi\|_{L^1}.$$

Si maintenant $u \in C_c^1(\Omega)$ est donnée, en appliquant cette inégalité à $\varphi := |u|^{p-1} u$, on obtient $\|u\|_p^p = \|\varphi\|_{L^1} \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{N}} \|\varphi\|_{L^{1^*}}$ et finalement :

$$\|u\|_p^p \leq (\text{mes } (\Omega))^{1/N} \|\varphi\|_{1^*} \leq C(p, \Omega) \| |u|^{p-1} \nabla u\|_1$$
$$\leq C(p, \Omega) \|u\|_p^{p-1} \|\nabla u\|_p ,$$

ce qui, joint à l'argument classique de densité, établit l'inégalité de Poincaré. □

8.19 Remarque. Si Ω est borné dans une direction ou est de mesure finie, on posera :

$$\lambda_1 := \lambda_1(\Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \ ; \ u \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega |u(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

Lorsque l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte on peut montrer (et nous le verrons par la suite) que λ_1 est atteint, c'est à dire qu'il existe $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\|\varphi_1\|^2 = 1$, et $\|\nabla \varphi_1\|^2 = \lambda_1$. On peut déjà vérifier que si λ_1 est atteint pour une certaine fonction φ_1, alors on doit avoir :

$$-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1,$$

au moins au sens des distributions. En effet pour $t > 0$ et $v \in C_c^\infty(\Omega)$, on a :

$$\lambda_1(1 + 2t(\varphi_1|v) + t^2\|v\|^2) = \lambda_1 \|\varphi_1 + tv\|^2$$
$$\leq \|\nabla \varphi_1 + t\nabla v\|^2$$
$$\leq \lambda_1 + 2t(\nabla \varphi_1 | \nabla v) + t^2 \|\nabla v\|^2 ,$$

d'où, en simplifiant et faisant tendre t vers zéro, on déduit que $(\nabla \varphi_1 | \nabla v) = \lambda_1(\varphi_1|v)$ et finalement que φ_1 vérifie l'équation $-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$ au sens des distributions.

De même si on définit $\lambda_{1,p}$ par :

$$\lambda_{1,p} := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \ ; \ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \int_\Omega |u(x)|^p dx = 1 \right\},$$

on sait que si Ω est tel que l'inégalité de Poincaré est vraie pour $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $\lambda_{1,p} > 0$. Dans le cas où l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte, on peut montrer que $\lambda_{1,p}$ est atteint pour une certaine fonction $\varphi_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant $\|\varphi_{1,p}\|_p = 1$ et :

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla\varphi_{1,p}|^{p-2}\nabla\varphi_{1,p}\right) = \lambda_{1,p}|\varphi_{1,p}|^{p-2}\varphi_{1,p} \qquad \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Nous reviendrons sur ces questions plus loin, lors de l'étude des multiplicateurs de Lagrange et des méthodes variationnelles. □

En utilisant la proposition 8.18, on obtient l'important résultat suivant :

8.20 Corollaire. *Si Ω est borné dans une direction ou s'il est de mesure finie alors, sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \mapsto \|\nabla u\|_p$ est une norme équivalente à celle induite par $W^{1,p}(\Omega)$.*

Lorsque cela n'est pas précisé, la norme *canonique* de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est supposée être $\|\nabla u\|_p$.

Dans le cas de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ on dispose de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, dont on pourra voir la démonstration dans les *Exercices*.

8.21 Proposition (inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soient Ω un ouvert borné et connexe de classe C^1 et $1 < p < \infty$. Alors si $\omega \subset \Omega$ est mesurable avec $\mathrm{mes}(\omega) > 0$ et $m(u) := \mathrm{mes}(\omega)^{-1} \int_\omega u(x)dx$, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de ω, Ω et p telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait :*

$$\|u - m(u)\|_p \leq C \, \|\nabla u\|_p. \tag{8.17}$$

En particulier sur l'espace $V_0 := \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \ m(u) = 0 \right\}$, $u \mapsto \|\nabla u\|_p$ est une norme équivalente à celle induite par la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

En réalité, avec les notations ci-dessus, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger proprement dite correspond au cas où $p = 2$ et $\omega = \Omega$.

Une propriété importante des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ est le fait qu'elles peuvent s'écrire comme la différence de deux fonctions positives de $W^{1,p}(\Omega)$. Plus précisément on a (voir par exemple G. Stampacchia [152, lemme I.1] et *Exercices*) :

8.22 Proposition. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ et :*

$$\nabla|u| = 1_{[u>0]}\nabla u - 1_{[u<0]}\nabla u.$$

En particulier $u^+ := \max(u, 0)$ et $u^- := \max(-u, 0)$ sont des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$.

Grâce à cette propriété on voit que :

$$\nabla u^+ = 1_{[u>0]}\nabla u, \qquad \nabla u^- = -1_{[u<0]}\nabla u.$$

Cependant il faut savoir que la propriété est spécifique aux espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et ne se généralise pas aux espaces $W^{m,p}(\Omega)$ avec $m \geq 2$. A ce sujet voir L. Hedberg [78, theorem 3.1 et la remarque *added in proof*, page 238] où le résultat suivant est prouvé.

8.23 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \geq 1$ un entier, $p > 1$ un réel et $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que $D^\alpha u = 0$ sur Ω^c pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m-1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction φ vérifiant $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\varphi(x) = 1$ sur un voisinage de $\Omega^c \cup \{\infty\}$, telle que*

$$\|\varphi u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

De plus on peut choisir $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ou bien telle que $(1-\varphi)u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

En particulier, si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et $u \geq 0$ presque partout, il existe une suite de fonctions $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telles que $u_n \geq 0$ et $\|u - u_n\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Le résultat suivant (inégalité de Kato) est très utile pour obtenir des estimations *a priori*. On pourra en voir la démonstration dans les *Exercices*. On rappelle que si $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$, on écrit $T_1 \geq T_2$ si pour toute fonction positive $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a $\langle T_1, \varphi\rangle \geq \langle T_2, \varphi\rangle$. On note enfin $\operatorname{sgn}(t)$ la fonction signe qui vaut $+1$ pour $t > 0$, zéro pour $t = 0$ et -1 pour $t < 0$.

8.24 Lemme (inégalité de Kato). *Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors on a :*

$$\Delta|u| \geq \operatorname{sgn}(u)\Delta u \quad \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega).$$

En utilisant la proposition 8.22 et la définition 8.6, pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on peut définir une notion de *maximum* de u sur $\partial\Omega$ au sens $W^{1,p}(\Omega)$ de la façon suivante.

8.25 Définition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On dit que $u \leq \lambda$ sur $\partial\Omega$ au sens de $W^{1,p}(\Omega)$ si $(u-\lambda)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on pose alors :*

$$\sup_{\partial\Omega} u := \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R},\ ;\ u \leq \lambda \ \text{ sur } \partial\Omega \ \text{ au sens de } W^{1,p}(\Omega)\right\},$$

(où par convention $\inf \varnothing := +\infty$) et de même

$$\inf_{\partial\Omega} u := -\sup_{\partial\Omega}(-u).$$

9. Opérateurs elliptiques du second ordre

Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire sur E (à valeurs) dans F est un couple $(A, D(A))$ où $D(A) \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E et A est une application linéaire de $D(A)$ dans F. On dit alors que $D(A)$ est le domaine de l'opérateur. Le graphe de A est défini par :

$$G(A) := \{(u, Au)\ ;\ u \in D(A)\} \subset E \times F.$$

Si $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ sont deux opérateurs de E dans F, on écrit $A \subset B$ lorsque $D(A) \subset D(B)$ et, pour tout $u \in D(A)$, on a $Au = Bu$. Lorsqu'on dit que $A = B$, cela signifie que $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'opérateur $(A, D(A))$ est *fermé* si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$. Cela revient à dire que si $(u_n)_n$ est une suite de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to f$ dans F, alors $u \in D(A)$ et $f = Au$. Par exemple si A est une application linéaire continue de E dans F, alors (A, E) est un opérateur fermé au sens que nous venons d'introduire. De même si $(A, D(A))$ est un opérateur fermé de E dans F et B est une application linéaire continue de E dans F, alors $(A + B, D(A))$ est fermé (voir *Exercices*). Un autre cas particulièrement intéressant pour la suite est le suivant. Si B est une application linéaire continue et *injective* de F dans E, alors en posant $D(A) := \mathrm{R}(B) := \mathrm{Im}(B)$ (i.e. image de B), et $A := B^{-1}$, on obtient un opérateur fermé $(A, D(A))$ de E dans F. En effet on voit que $G(A)$ est fermé dans $E \times F$, puisque $G(A)$ n'est autre que l'image de $G(B)$ dans l'isométrie canonique entre $E \times F$ et $F \times E$.

Lorsque $(A, D(A))$ est fermé, on munit $D(A)$ de la *norme du graphe* :

$$\|u\|_{D(A)} := \|u\|_A := \|u\|_E + \|Au\|_F.$$

On peut vérifier qu'alors $D(A)$ muni de cette norme est un espace de Banach dont l'injection dans E est continue ; de plus A est continu de $D(A)$ (muni de cette norme) dans F.

On dit que $(A, D(A))$ est *fermable* si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de $G(A)$ dans $E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire, i.e. si $(u, f) \in \overline{G(A)}$ et $(u, g) \in \overline{G(A)}$ alors on a $f = g$. Cela revient à dire que si une suite $(u_n)_n$ de $D(A)$ est telle que $u_n \to 0$, et $Au_n \to f$ alors $f = 0$.

Voici un exemple typique d'un opérateur fermé sur $L^2(\Omega)$ que nous utiliserons par la suite. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $a := (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$, une matrice définie presque partout sur Ω vérifiant la *condition de coercivité* :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. sur } \Omega, \\ (a(x)\xi|\xi) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \ge \alpha|\xi|^2. \end{cases} \tag{9.1}$$

On suppose de plus que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour $1 \le i, j \le N$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $a_{ij}\partial_j u$ est un élément de $L^2(\Omega)$; lorsque $\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}\partial_j u)$, qui n'est défini que comme distribution, est un élément de $L^2(\Omega)$, on peut définir un opérateur $(A, D(A))$ par :

$$
\begin{aligned}
D(A) &:= \left\{ u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) \in L^2(\Omega) \right\} \\
Au &:= -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) = -\mathrm{div}\left(a(\cdot)\nabla u\right),
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

et vérifier qu'il est fermé. On dit que A est un opérateur elliptique du second ordre sous forme divergentielle. On remarquera que dans la définition de $D(A)$ on demande que la somme des $\partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right)$, et non pas chacun de ces termes, soit dans $L^2(\Omega)$. Dans la suite $\|\cdot\|$ et $(\cdot|\cdot)$ désignent la norme et le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

9.1 Lemme. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, a une matrice à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant (9.1) et $(A, D(A))$ l'opérateur défini par (9.2). Alors :*
(i) *pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe un unique $u \in D(A)$ tel que : $u + Au = f$. De plus $(I+A)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même et on a $\|u\| \le \|f\|$, et si Ω est borné $(I+A)^{-1}$ est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.*
(ii) *L'opérateur $(A, D(A))$ est fermé sur $L^2(\Omega)$.*
(iii) *$D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, posons

$$
a_0(u,v) := (u|v) + \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i v(x)dx.
$$

On vérifie sans peine que $a_0(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et qu'elle est coercive puisque $a_0(u,u) \ge \min(1,\alpha)\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$: par conséquent, d'après le lemme de Lax-Milgram (lemme 2.3), pour tout $f \in L^2(\Omega)$ le problème :

$$
\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a_0(u,v) = (f|v),
$$

admet une solution unique qui vérifie $\|u\| \le \|f\|$. Or pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a, en désignant par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$:

$$
\langle u + Au, \varphi\rangle = a_0(u,\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,
$$

et par conséquent $|\langle u + Au, \varphi\rangle| \le \|f\| \cdot \|\varphi\|$, ce qui implique, en utilisant la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et le théorème de Riesz, que $u + Au$ est dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que $u \in D(A)$ et $u + Au = f$.

On voit ainsi que $(I+A)^{-1}$ est une injection continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même et que son image est précisément $D(A)$. Comme nous l'avons signalé plus haut (voir aussi *Exercices*), $(I + A, D(A))$ est un opérateur fermé et on en déduit que $(A, D(A))$ est fermé. Par ailleurs si Ω est borné, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich-Kondrachov 8.16) ; comme par définition on a $D(A) \subset H_0^1(\Omega)$, on en conclut que $(I + A)^{-1}$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

Pour voir que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que $D(A)^\perp = \{0\}$; soit donc $f \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout $v \in D(A)$ on ait $(f|v) = 0$. En prenant $u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$, alors :

$$0 = (f|u) = (u + Au|u) \geq \|u\|^2,$$

c'est à dire que $u = 0$ et $f = 0$. Ce qui montre que $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$. □

9.2 Remarque. Nous devons faire remarquer qu'en général, si on suppose seulement que les coefficients a_{ij} sont dans $L^\infty(\Omega)$ sans aucune hypothèse de régularité supplémentaire, même en dimension $N = 1$, les fonctions régulières C_c^∞ ne sont pas nécessairement contenues dans $D(A)$ (voir *Exercices*). □

Considérons maintenant un opérateur linéaire $(A, D(A))$ tel que $D(A)$ soit dense dans E ; on définit *l'adjoint* de A (noté $(A^*, D(A^*))$) de la façon suivante. On pose :

$$D(A^*) := \{\varphi \in F' \ ; \ \exists C \geq 0 \text{ t.q. } \forall u \in D(A), \ \langle \varphi, Au\rangle \leq C\|u\|\}.$$

Cela signifie que $D(A^*)$ est précisément l'ensemble des éléments $\varphi \in F'$ tels que l'application $u \mapsto \langle \varphi, Au\rangle$ peut se prolonger, par densité, en une forme linéaire f continue sur E. Pour un tel φ on posera : $A^*\varphi := f$. On peut montrer facilement que $(A^*, D(A^*))$ est un opérateur fermé sur F' mais, en général, $D(A^*)$ n'est pas dense dans F' (cependant si F est réflexif, alors $D(A^*)$ est dense dans F'). Lorsque E est un espace réflexif et $F := E'$, un opérateur $(A, D(A))$ de E dans E' est dit auto-adjoint si $A = A^*$.

Nous allons montrer que l'opérateur $(A, D(A))$ défini ci-dessus par (9.2) est auto-adjoint, lorsque la matrice a est symétrique.

9.3 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et a une matrice à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant (9.1) telle que pour $1 \leq i, j \leq N$ on ait : $a_{ij} = a_{ji}$ p.p. sur Ω. Alors l'opérateur $(A, D(A))$ défini par (9.2) est auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Nous savons que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et ainsi on peut définir l'opérateur $(A^*, D(A^*))$. Montrons d'abord l'inclusion $A \subset A^*$. Si $u \in D(A)$, alors pour $\varphi \in D(A)$, par une intégration par parties et en utilisant le fait que $a^* = a$, on a :

$$\begin{aligned}(u|A\varphi) &= -\int_\Omega u(x) \operatorname{div}(a(x)\nabla\varphi(x))\,dx \\ &= \int_\Omega a(x)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla u(x)dx \\ &= \int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = (Au|\varphi). \qquad (9.3)\end{aligned}$$

Cela implique que pour $\varphi \in D(A)$, on a $|(u|A\varphi)| \leq \|Au\|\cdot\|\varphi\|$, c'est à dire que u est dans le domaine de A^*. Par ailleurs la relation (9.3) montre que $(A^*u|\varphi) = (Au|\varphi)$ pour tout φ dans $D(A)$, et par densité de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ on conclut que $A^*u = Au$.

Soit maintenant $v \in D(A^*)$ et posons $f := v + A^*v \in L^2(\Omega)$. D'après le lemme 9.1, on sait qu'il existe $u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$. Or puisque $A \subset A^*$, on a :

$$f = v + A^*v = u + Au = u + A^*u,$$

c'est à dire que $(u - v) + A^*(u - v) = 0$. Soit $\varphi \in D(A)$ tel que $\varphi + A\varphi = u - v$. On a :

$$0 = (u - v + A^*(u - v)|\varphi) = (u - v|\varphi + A\varphi) = \|u - v\|^2,$$

et donc $v = u$, c'est à dire que v est dans $D(A)$, ce qui montre que $A = A^*$. □

Pour d'autres exemples d'opérateurs non bornés construits avec des opérateurs différentiels, voir *Exercices*.

9.4 Remarque. Soient H et H_0 deux espaces de Hilbert, tels que $H \subset H_0$ avec injection continue et dense, le dual H_0' étant identifié à H_0, et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. D'après le lemme de Lax-Milgram, on sait que pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$ on ait $a(u, v) = \langle f, v\rangle$. On sait qu'il existe une application linéaire continue $\widetilde{A}$ de H dans H' telle que $a(u, v) = \langle \widetilde{A}u, v\rangle$ et que l'application $f \mapsto u = \widetilde{A}^{-1}f$ est linéaire continue de H' dans H. En particulier si $\varphi \in H_0$, on conclut qu'il existe u_φ tel que pour tout $v \in H$ on ait $a(u_\varphi, v) = (\varphi|v)$, où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de H_0. Si on pose $B\varphi := u_\varphi$, on a ainsi un opérateur linéaire continu et injectif de H_0 dans H, et en posant $D(A) := B(H_0)$ et $Au := B^{-1}(u)$ pour $u \in D(A)$, on obtient un opérateur A non borné et fermé sur H_0. En particulier on peut voir facilement que si $u \in H$ est tel que $\widetilde{A}u \in H_0$, alors $u \in D(A)$ et $Au = \widetilde{A}u$. On dit parfois que $\widetilde{A}$ est une *extension* de A à H. Dans ces conditions, très souvent, pour $u \in H$ on écrit, par un abus de notation, $(Au|u) = \langle \widetilde{A}u, u\rangle = a(u, u)$. Dans certains cas (quand il n'y a pas risque de confusion) même pour $u \in H$ on écrit Au au lieu de $\widetilde{A}u$. Lorsque la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors on peut vérifier que A et $\widetilde{A}$ sont auto-adjoints et positifs.

Un exemple typique est le suivant. Sur $H := H_0^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné, on considère la forme bilinéaire :

$$a(u, v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i v(x)dx,$$

en supposant que les coefficients a_{ij} sont dans $L^\infty(\Omega)$ et que pour un $\alpha > 0$ on a $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2$. Alors en posant $H_0 := L^2(\Omega)$, l'opérateur A est celui que nous avons défini en (9.2), alors que $\widetilde{A}$ est l'application qui à $u \in H_0^1(\Omega)$ fait correspondre la distribution $\widetilde{A}u := -\sum_{i,j=1}^N \partial_i (a_{ij}\partial_j u)$ élément de $H^{-1}(\Omega)$. Sur cet exemple on voit que pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il n'est pas très gênant d'écrire Au au lieu de $\widetilde{A}u$, du moment que l'on sait que ce dernier doit être interprété au sens des distributions. □

10. Principes du maximum

Un très grand nombre de résultats de régularité, d'unicité ou d'existence de solutions dans les problèmes elliptiques du second ordre peuvent être établis en utilisant (on pourrait dire *uniquement*) le principe du maximum, dont nous donnons les énoncés ci-dessous (pour illustrer cette approche dans l'établissement des résultats de régularité voir A. Brandt [25] ainsi que les références données plus loin). Par ailleurs les différents type de principes du maximum (très souvent on dit *le* principe du maximum) sont très utiles pour établir des estimations *a priori* sur d'éventuelles solutions.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice, $b(\cdot) := (b_i(\cdot))_{1\leq i\leq N}$ et $\beta(\cdot) := (\beta_i(\cdot))_{1\leq i\leq N}$ deux vecteurs, et c une fonction. On considère A et L deux opérateurs du second ordre définis par :

$$Au := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) + \sum_{j=1}^{N} \partial_j \left(\beta_j u\right) + b\cdot\nabla u + cu, \tag{10.1}$$

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{ij} u + b\cdot\nabla u + cu\,, \tag{10.2}$$

et avec des hypothèses sur les coefficients on précisera les domaines de ces opérateurs. On dit que A est un opérateur du second ordre à *partie principale divergentielle*. Remarquons en premier lieu que si par exemple les coefficients a_{ij} et β_i sont dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, l'opérateur A est du même type que L. Il est également à noter que dans l'opérateur L on peut supposer sans perte de généralité que $a_{ij} = a_{ji}$, car $\partial_{ji}u = \partial_{ij}u$ et :

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{ij}u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}\partial_{ij}u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\partial_{ij}u.$$

En revanche, il faut bien noter qu'en général les deux opérateurs A et L sont de natures différentes, et qu'en particulier les propriétés (surtout celles qui concernent le spectre) de l'opérateur A dépendent de manière essentielle de la symétrie ou non de la matrice $a(\cdot)$. En règle générale on supposera que la matrice $a(\cdot)$ vérifie la condition de coercivité (ou d'ellipticité) :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \text{p.p. sur } \Omega, \\ a(x)\xi\cdot\xi = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2. \end{cases} \tag{10.3}$$

Rappelons aussi que $\sup_{\partial\Omega} u$ a été défini pour $u \in H^1(\Omega)$ à la définition 8.25, et que $\sup_\Omega u$ désigne la borne supérieure essentielle de u sur Ω, i.e.

$$\sup_{\Omega} u := \inf\left\{\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ u\leq\lambda \text{ p.p. sur } \Omega\right\}.$$

10.1 Théorème (principe du maximum faible). *Soient Ω un ouvert borné connexe et a_{ij}, β_i, b_i, c dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose que la condition (10.3) est satisfaite et que*

$$c + \nabla \cdot \beta = c + \sum_{i=1}^{N} \partial_i \beta_i \geq 0 \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $Au \leq 0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ alors :

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Voir D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 8.1] ou *Exercices* pour la démonstration (cf. également G. Stampacchia [152, théorème 3.7] pour le cas où les coefficients b_i, β_i sont dans $L^N(\Omega)$ et $c \in L^{N/2}(\Omega)$). On notera que le principe du maximum faible implique que si $Au = f \geq 0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u \geq 0$, et qu'en particulier on obtient un résultat d'unicité pour des équations du type $Au = f$ et $u \in H_0^1(\Omega)$: en effet si $Au = 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant le principe du maximum faible à u et à $-u$, on obtient $\sup_\Omega u \leq 0$ et $\sup_\Omega(-u) \leq 0$, i.e. $u \equiv 0$. La version *forte* du principe du maximum (voir D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 8.19]) est donnée par :

10.2 Théorème (principe du maximum fort). *Soient Ω un ouvert borné connexe et $a(\cdot)$ une matrice vérifiant la condition de coercivité (10.3). On suppose que les coefficients a_{ij}, β_i, b_i et c sont dans $L^\infty(\Omega)$ et que $c - \nabla \cdot \beta \geq 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $Au \leq 0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$, et si pour une boule $B \subset\subset \Omega$ on a :*

$$\sup_{B} u = \sup_{\Omega} u \geq 0,$$

alors u est constante sur Ω et on a $\nabla \cdot \beta = \operatorname{div} \beta = c$.

En ce qui concerne les opérateurs comme L donné par (10.2) on a le résultat suivant (voir D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, § 3.1 et § 3.2], M.H. Protter & H.F. Weinberger [133]) :

10.3 Théorème (principe du maximum classique). *Soient Ω un ouvert borné connexe et L comme dans (10.2). On suppose que $c \geq 0$, que (10.3) est satisfaite et que $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifie $Lu \leq 0$ alors on a :*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{\sigma \in \partial\Omega} u^+(\sigma).$$

Comme nous l'avons signalé plus haut, ce théorème permet de montrer que pour $f \in C(\Omega)$ et $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

est unique dans $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. □

Voici une version plus précise du principe du maximum (cette version est dûe à E. Hopf [83] ; cf. D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 3.5]) :

10.4 Théorème (principe du maximum de Hopf). *Soient Ω un ouvert borné connexe et L comme dans (10.2). On suppose que $c \geq 0$, que (10.3) est satisfaite et que $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifie $Lu \leq 0$ et si u atteint un maximum ≥ 0 à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.*

Finalement nous donnerons une version du principe du maximum pour l'opérateur L, en affaiblissant les hypothèses de régularité (cf. D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 9.1]) :

10.5 Théorème (principe du maximum d'Aleksandrov). *On considère un ouvert borné connexe Ω et L un opérateur elliptique comme dans (10.2). On suppose que $c \geq 0$, que (10.3) est satisfaite et que a_{ij}, b_i, c sont dans $C(\overline{\Omega})$ et $f \in L^N(\Omega)$. Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de $N, \|b\|_{L^N(\Omega)}$ et du diamètre de Ω telle que si $u \in W^{2,N}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifie $Lu \leq f$ on a :*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{\sigma\in\partial\Omega} u(\sigma) + C\,\|f\|_{L^N(\Omega)}.$$

10.6 Remarque. Ici nous n'avons pas traité le cas où l'ouvert Ω est non borné. Cependant en imposant un certain comportement à l'infini, et en utilisant les techniques utilisées pour établir les résultats précédents on peut énoncer des principes du maximum pour les ouverts non bornés. Un exemple typique et intéressant est le suivant (voir *Exercices*) :

10.7 Proposition. *On suppose que pour $1 \leq i, j \leq N$ les coefficients a_{ij} sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et vérifient la condition (10.3), $c(x) > 0$ p.p. Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie*

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\,(a_{ij}\partial_j u) + cu \leq 0,$$

alors $u \leq 0$ presque partout.

11. Théorèmes de régularité

Lorsqu'on aborde la résolution d'une équation aux dérivées partielles par une méthode variationnelle, en règle générale on le fait en changeant peu ou prou la notion de *solution* : alors que très souvent dans les applications on a besoin de trouver des solutions régulières (ou classiques) des équations que l'on rencontre, les méthodes variationnelles, et c'est là l'une de leurs limitations, ne permettent de trouver que des solutions *faibles*.

Typiquement si l'on considère l'équation de Laplace (1.1), ou encore l'exemple du problème de Dirichlet $-\Delta u = f$ dans un ouvert borné et régulier Ω et $u = 0$ sur le bord $\partial\Omega$, même si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, l'application du lemme de Lax-Milgram à ce problème ne donne qu'une solution u dans $H^1_0(\Omega)$: on dit qu'au lieu de chercher une solution au sens classique, on cherche d'abord une solution faible, alors que

d'autres techniques, plus fines ou plus laborieuses, permettent de montrer l'existence d'une solution $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

On voit donc qu'il est indispensable de *boucler la boucle* en se demandant dans quelles circonstances la solution faible ainsi trouvée est solution classique. Naturellement cela n'est pas toujours vrai, car il existe des problèmes pour lesquels il n'y a pas de solution classique, mais qui possèdent tout de même une solution faible. A l'inverse, il existe aussi des équations qui admettent une solution classique, mais qui ne peuvent pas être traitées directement par une méthode variationnelle, en cherchant d'abord une solution faible. Il faut donc disposer en plus des méthodes variationnelles, que nous étudierons plus loin, de résultats permettant de prouver que les solutions variationnelles sont (du moins dans certains cas) solutions régulières du problème étudié. Par ailleurs il faut savoir qu'il y a plusieurs notions de *régularité*, même si elles se recouvrent en partie.

Il y a d'une part la régularité au sens classique des espaces C^k ou $C^{k,\theta}$ pour $0 < \theta < 1$, et d'autre part la régularité au sens des espaces de Sobolev $W^{m,p}$. Pour passer de cette dernière notion à la première, comme nous le ferons un peu plus loin sur un exemple, on essaie de prouver que la solution u du problème est dans un espace $W^{m,p}(\Omega)$ pour un couple de réels m, p tels que $mp > N$, puis on utilise le fait que (pour un ouvert Ω suffisamment régulier) on a $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, d'après le théorème d'inclusion de Morrey-Sobolev (proposition 8.10, (iii)).

En général les théorèmes de régularité sont prouvés en distinguant la régularité à l'intérieur de celle au bord de l'ouvert. Pour la régularité à l'intérieur, après *localisation* (qui consiste essentiellement à considérer la fonction ζu où ζ est une fonction de troncature régulière), on se ramène à un problème dans $\mathbb{R}^N$ et on se base sur un théorème disant que si $Au = f$ ou $Lu = f$, si les coefficients a_{ij}, β_i, b, c et la donnée f sont suffisamment réguliers sur $\mathbb{R}^N$, et si on sait que u est dans un espace de fonctions de régularité minimale et bien adaptée au problème, alors u est plus régulière que ce que l'on savait.

Ensuite, pour montrer la régularité jusqu'au bord, on établit le même genre de résultats en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par le demi-espace

$$\mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1} \times]0, \infty[,$$

et on utilise des cartes locales pour transformer le problème au voisinage du bord en un problème sur le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$. Le théorème suivant peut être utilisé comme point de départ (voir par exemple E. Stein [153, Chapter V, § 3.3, theorem 3]) :

11.1 Théorème. *Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ vérifie*

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N),$$

alors pour une constante indépendante de f on a

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Notons enfin que les résultats de régularité, joints à des résultats d'unicité, permettent aussi de montrer l'existence de solutions pour un grand nombre de problèmes elliptiques du second ordre. Dans ce paragraphe, nous réunissons quelques résultats concernant la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre qui seront utiles par la suite. Nous commençons par énoncer le théorème de régularité de Schauder (voir par exemple D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 6.6], E. Giusti [75], O.A. Ladyženskaja & N.N. Ural'ceva [92] ou A. Brandt [25]).

11.2 Théorème de Schauder. *L'opérateur L étant défini par la relation (10.2), on suppose que les coefficients a_{ij}, b et c sont dans $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ pour un $\theta \in]0,1[$ et un entier $k \geq 0$, que $c \geq 0$ et que la condition de coercivité (10.3) est satisfaite. Alors si l'ouvert Ω est borné et de classe $C^{k+2,\theta}$ et $\varphi \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ ainsi que $f \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ sont données, il existe une unique fonction $u \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ telle que*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

et de plus, pour une constante C dépendant seulement de Ω, θ, α ainsi que des normes des coefficients a_{ij}, b_i, c dans $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, on a

$$\|u\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} \right),$$
$$\|D^2 u\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})} \right).$$

(On notera que ce théorème n'est pas valable pour $\theta = 0$ ni pour $\theta = 1$; voir *Exercices*).

Toujours pour des opérateurs comme L donné par (10.2), mais opérant dans les espaces $L^p(\Omega)$, on a le résultat suivant (voir par exemple le livre de D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorem 9.15 & lemma 9.17], ou O.A. Ladyženskaja & N.N. Ural'ceva [92]).

11.3 Théorème. *L'opérateur L étant donné par (10.2), on suppose que les coefficients a_{ij} sont dans $C(\overline{\Omega})$, b et c dans $L^\infty(\Omega)$, que $c \geq 0$ et que la condition de coercivité (10.3) est satisfaite. Alors si l'ouvert Ω est borné et de classe $C^{1,1}$ et $f \in L^p(\Omega)$ est donnée pour $1 < p < \infty$, il existe une unique fonction $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

et de plus, pour une constante C indépendante de f, u on a

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier si $p > \frac{N}{2}$ et $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ il existe une unique solution $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ du problème de Dirichlet $Lu = f$ dans Ω et $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$.

Considérons maintenant l'opérateur A défini en (10.1) ; en règle générale, lorsque l'on résout une équation du type $Au = f$ dans Ω et $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$,

l'équation $Au = f$ est entendue au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et la condition au bord est interprétée au sens $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$. De plus, contrairement à ce qui se passe pour les opérateurs comme L défini en (10.2), la condition $c \geq 0$ *ne suffit pas* à montrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous énonçons le théorème qui suit sans aborder la question de l'existence de solution (voir D. Gilbarg & N.S. Trudinger [74, theorems 8.12 & 8.13]).

11.4 Théorème. *Soit A comme en (10.1), la condition de coercivité (10.3) étant satisfaite. On suppose que, pour un entier $k \geq 0$, Ω est de classe C^{k+2}, que les coefficients a_{ij}, β_j sont dans $C^{k,1}(\overline{\Omega})$, b_i, c sont dans $L^\infty(\Omega)$ si $k = 0$ et dans $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ si $k \geq 1$. Si $f \in H^k(\Omega)$, $\varphi \in H^{k+2}(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ sont telles que $Au = f$ et $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$, alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$, et pour une constante C dépendant uniquement de Ω, k, α et des normes de a_{ij}, β_j, b_i, c on a :*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^k(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{k+2}(\Omega)} \right).$$

De plus si Ω est de classe C^∞ et $f, \varphi, a_{ij}, \beta_j, b_i, c$ sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

11.5 Remarque. Comme nous l'avons signalé au début de ce paragraphe, on peut donner des versions *locales* des théorèmes de régularité que nous venons de voir. Nous renvoyons aux ouvrages cités en référence pour ces aspects ; en particulier pour des domaines polygônaux (ou ayant des *coins*) il faut savoir qu'en général les estimations intérieures sont vraies mais que les solutions peuvent présenter des singularités au voisinage des *coins*. Pour une analyse de ces questions voir P. Grisvard [76]. □

11.6 Exemple. Voici un exemple typique de l'utilisation des théorèmes de régularité que nous venons de voir. Supposons que Ω est un ouvert de classe $C^{2,\theta}$ pour un $\theta \in]0,1[$, et que $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie l'équation semilinéaire :

$$-\Delta u = a(x)|u|^{q-1}u$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ et $q \geq 1$ est un réel tel que $(N-2)q \leq N+2$.

Si $N = 1$, comme $H_0^1(\Omega) \subset C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$, on conclut que $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$, et par conséquent $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et en particulier $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$; si $a \in C(\overline{\Omega})$ on déduit que u est de classe C^2.

Si $N = 2$, alors, d'après les injections de Sobolev, pour tout $p < \infty$ on a $u \in L^p(\Omega)$ et $a(\cdot)|u|^{q-1}u \in L^p(\Omega)$. Dans ce cas le théorème 11.3 implique que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p < \infty$, et d'après l'inégalité de Morrey-Sobolev on conclut que $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$. De plus si $a \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ pour un $\theta \in]0,1[$, le théorème 11.2 permet de conclure que $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$.

Si $N \geq 3$, alors $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = 2N/(N-2)$. Par conséquent en posant $p_0 := 2^*/q$ et $f := a(\cdot)|u|^{q-1}u$, on a $f \in L^{p_0}(\Omega)$ et le théorème 11.3 permet de conclure que $u \in W^{2,p_0}(\Omega)$ (on remarquera que $p_0 > 1$). Si $2p_0 > N$, alors d'après l'inégalité de Morrey-Sobolev $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ avec $\theta := 1 - \frac{N}{2p_0}$.

Si $2p_0 = N$, alors pour tout $p < \infty$ on a $u \in L^p(\Omega)$ et d'après le théorème 11.3, comme $\Delta u \in L^p(\Omega)$ on a $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout p fini, donc $u \in C^{0,\theta}$ pour tout $\theta < 1$. Finalement si $2p_0 \geq N$, on sait que u est höldérienne et de nouveau en utilisant le fait que u satisfait l'équation, on conclut que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout p et qu'en particulier $u \in C^{1,1}$.

Si $2p_0 < N$, sachant que d'après les inégalités de Sobolev on a $u \in L^{r_1}(\Omega)$ avec $r_1 > 2^*$ donné par

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N},$$

on peut affirmer que $-\Delta u = f = a|u|^{q-1}u \in L^{p_1}(\Omega)$ avec $p_1 := r_1/q > p_0$ et par conséquent $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$. Ainsi en répétant cette procédure un nombre fini de fois (par exemple k fois), on construit une suite $p_0 < p_1 < \cdots < p_k$ telle que $-\Delta u \in L^{p_k}(\Omega)$ avec $2p_k > N$ et on arrive à voir que $u \in W^{2,p_k}(\Omega)$; finalement, comme ci-dessus, on conclut que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout p fini et $u \in C^{1,1}$. De plus si $a \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, le théorème 11.2 permet de conclure que $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$. Ce procédé, appelé *argument de bootstrap*[1], est constamment utilisé pour passer d'une solution faible (obtenue par exemple par une méthode variationnelle) à une solution classique. □

Un autre résultat très utile pour établir la régularité des solutions est le lemme suivant dû à H. Brezis & T. Kato [32] (voir aussi *Exercices*).

11.7 Théorème (Brezis-Kato). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$ et $V \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. On suppose que $V^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Il existe alors $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, tel que si $\lambda > \lambda_1$ et $g \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, l'équation*

$$u \in H^1_0(\Omega), \qquad -\Delta u + \lambda u = Vu + g \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega),$$

admet une solution unique telle que $V^- u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. De plus si $g \geq 0$ on a $u \geq 0$, et $u \in L^p(\Omega)$ pour $2 \leq p < \infty$.
En particulier si $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifie $V^- u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $-\Delta u = Vu$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, alors pour tout $p < \infty$ et $p \geq 2$, on a $u \in L^p(\Omega)$.

12. Valeurs propres

Si E est un espace de Banach complexe et $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire de E dans lui-même, on appelle *ensemble résolvant* de A et on note $\rho(A)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'image de l'opérateur $(\lambda I - A, D(A))$ est *dense* dans E et de plus l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ peut être prolongé (par densité) en un opérateur continu de E dans lui-même. On notera qu'en particulier si $(A, D(A))$ est fermé, et $\lambda \in \rho(A)$, alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu de E dans lui-même dont l'image est précisément $D(A)$. Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est appelé

[1] *Bootstrap* en anglais désigne une lanière ou languette de cuir sur une botte permettant de tirer dessus pour la chausser ; *bootstrapping* veut dire, familièrement, réussir une action sans l'aide d'autrui.

la *résolvante* de A (pour toutes ces questions voir par exemple K. Yosida [165, chapter VIII]). Le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le *spectre* de A (parfois noté $\mathrm{Sp}(A)$). Si $\lambda \in \sigma(A)$ est tel qu'il existe $u \in D(A)$, $u \neq 0$ vérifiant $Au = \lambda u$, on dit que λ est une valeur propre de A ; l'ensemble des valeurs propres est appelé le *spectre ponctuel* de A. Rappelons aussi que $r(A) := \sup\{|\lambda| \, ; \lambda \in \sigma(A)\}$ est le rayon spectral de A, et que dans le cas particulier où A est un opérateur continu, $\rho(A)$ est un ouvert non borné et on a :

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} .$$

La résolvante de A est souvent notée

$$R(\lambda) := R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} ,$$

et $\lambda \mapsto R(\lambda)$ est une fonction holomorphe définie sur $\rho(A)$ à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$, i.e. l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans lui-même. On peut vérifier facilement que si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a l'identité :

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \tag{12.1}$$

En utilisant cette relation on montre le résultat suivant (voir *Exercices*) :

12.1 Lemme. *Soient E un espace de Banach complexe et $A \in \mathscr{L}(E)$. Si $(\lambda_n)_n$ est une suite de $\rho(A)$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{C}$, alors*

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n)\| = +\infty.$$

Notons enfin que si $|\lambda| > r(A)$, alors $R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$, et que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est un pôle d'ordre $m \geq 1$ de $R(\lambda)$, alors λ_0 est une valeur propre de A.

12.2 Remarque. Lorsque l'espace de Banach E est réel, pour étudier le spectre d'un opérateur A agissant dans E, comme on le fait lors de l'étude du spectre d'une matrice carrée réelle, il est plus commode de considérer le complexifié de E, i.e. l'espace $\widetilde{E} := E \oplus iE$, et l'opérateur $\widetilde{A}$ défini de façon naturelle par $\widetilde{A}(u + iv) := Au + iAv$ agissant sur $\widetilde{E}$. Nous procéderons toujours de cette manière pour étudier le spectre d'un opérateur réel agissant sur un espace de Banach réel. □

L'étude du spectre est particulièrement simplifiée lorsque l'opérateur est compact, ou bien lorsqu'il est à *résolvante compacte*, i.e. pour un $\lambda_0 \in \rho(A)$, la résolvante $R(\lambda_0)$ est compacte (voir *Exercices*). Rappelons que si E est un espace de Banach complexe de dimension infinie et T est un opérateur linéaire de E dans E, on dit que T est compact si l'image de la boule unité $B(0,1) \subset E$ par T est relativement compacte dans E. En effet dans ce cas le théorème (ou l'alternative) de Fredholm implique que si T est un opérateur compact, alors $0 \in \sigma(T)$, tous les éléments non nuls de $\sigma(T)$ sont des valeurs propres de T, et chaque valeur propre a un sous-espace propre de dimension finie ; plus précisément $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est soit vide, soit un ensemble fini, soit une suite infinie d'éléments λ_n convergeant

vers zéro (voir par exemple H. Brezis [28, théorème VI.8], K. Yosida [165, chapter VIII] ou F. Riesz & B. Sz.-Nagy [142, chapitre VI]).

En ce qui concerne les opérateurs elliptiques du second ordre que nous avons considérés plus haut en (10.1) et (10.2), bien que ces opérateurs soient non bornés, dans un grand nombre de cas on peut étudier leur spectre en se ramenant à l'étude du spectre d'un opérateur compact.

Par exemple considérons l'opérateur A donné par (10.1), où on suppose que les coefficients a_{ij}, β_i, b_i, c sont dans $L^\infty(\Omega)$ et que pour un $\alpha > 0$ on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur Ω, $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$. En supposant que Ω est borné et que le domaine de A est donné par

$$D(A) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \; ; \; Au \in L^2(\Omega) \right\},$$

on peut voir facilement qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on ait $\langle Au + \lambda u, u\rangle \geq \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2$ (c'est un cas particulier de l'inégalité de Gårding ; voir par exemple K. Yosida [165, § VI.8] et aussi *Exercices*). On en déduit tout de suite que $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans lui-même et que son image est précisément $D(A)$. Comme d'après le théorème de Rellich-Kondrachov 8.16 l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on conclut que $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ est compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même : on voit que A est à résolvante compacte. Par conséquent, puisque zéro n'est pas valeur propre de $(A + \lambda_0 I)^{-1}$, il existe une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$ telle que $\mu_n \to 0$, chaque μ_n étant une valeur propre de multiplicité finie, et le spectre de $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ est donné par $\{0\} \cup \{\mu_n \; ; \; n \geq 1\}$. Finalement on conclut que le spectre de A est donné par

$$\sigma(A) = \{\lambda_n \; ; \; n \geq 1\}, \qquad \text{avec} \quad \lambda_n := \frac{1}{\mu_n} - \lambda_0.$$

On remarquera que $|\lambda_n| \to +\infty$; en fait on peut donner une estimation sur la façon dont $|\lambda_n|$ tend vers l'infini (voir chapitre 5).

On peut montrer, en procédant de manière analogue mais en utilisant le théorème de Schauder 11.2, que l'opérateur L donné par (10.2) agissant dans l'espace $C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, avec le domaine

$$D(L) := \left\{ u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega}) \; ; \; u = 0 \;\; \text{sur} \;\; \partial\Omega \right\},$$

possède un spectre discret : $\sigma(L) := \{\lambda_n \; ; \; n \geq 1\}$ et $|\lambda_n| \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$ (voir *Exercices*).

Dans le cas des opérateurs elliptiques que nous considérons ici, la première valeur propre joue un rôle particulier. En effet sous les hypothèses habituelles que nous avons faites jusqu'ici, on peut montrer que si de plus l'ouvert Ω est connexe, alors la première valeur propre est simple et possède une fonction propre positive. Ce résultat est basé sur le théorème de Krein-Rutman que nous allons énoncer dans un instant dans le cadre particulier des espaces $C(\overline{\Omega})$ et $L^p(\Omega)$ (voir M.G. Krein & M.A. Rutman [89], et pour le cas général voir H.H. Schaefer [147, Appendix, § 2] ou E. Zeidler [166, § 7.8]) ; pour faciliter la tâche du lecteur, dans

ce qui suit nous donnons, en le résumant, l'exposé que donne H.H. Schaefer. Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que

$$\text{(12.2)} \qquad \begin{cases} \Omega \text{ est un ouvert borné connexe,} \\ E = C(\overline{\Omega}) \text{ et } \Omega \text{ de classe } C^2, \\ \text{ou bien } E = L^p(\Omega), \text{ et } 1 < p < \infty. \end{cases}$$

La norme de E sera désignée par $\|\cdot\|$ (noter qu'ici E est un espace de Banach réel ; cf. remarque 12.2). Rappelons que si $B \in \mathscr{L}(E)$ est un opérateur linéaire et continu de E dans lui-même, on dit que B est positif si pour toute fonction $f \in E$ telle que $f \geq 0$, on a $Bf \geq 0$; dans ce cas on écrit $B \geq 0$. Comme tout élément $f \in E$ peut s'écrire $f = f^+ - f^-$ et que $\|f\| = \| \, |f| \, \|$, on peut vérifier facilement que si $B \in \mathscr{L}(E)$ est positif, alors on a :

$$\|B\| = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|=1}} \|Bf\| = \sup_{\substack{f \in E,\, f \geq 0 \\ \|f\|=1}} \|Bf\|.$$

On en conclut en particulier que le cône des opérateurs positifs dans $\mathscr{L}(E)$ est *normal* c'est à dire que si $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(E)$ sont deux opérateurs positifs alors $\|B_1\| \leq \|B_1 + B_2\|$. Rappelons enfin que si X est un espace de Banach complexe et $z \mapsto f(z)$ est une fonction holomorphe (sur un ouvert ω du plan complexe $\mathbb{C}$) à valeurs dans X, un point $z_0 \in \overline{\omega}$ est un point régulier de f s'il existe un disque $D(z_0, R)$ et une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur $\omega \cup D(z_0, R)$ telle que $f = \widetilde{f}$ sur ω. Un point qui n'est pas régulier est dit un point singulier. On peut alors montrer facilement le lemme suivant (voir H.H. Schaefer [147, Appendix, Theorem 2.1] et *Exercices*).

12.3 Lemme. *Soient $B_n \in \mathscr{L}(E)$ une famille d'opérateurs positifs telle que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ ait un rayon de convergence $r_0 > 0$ dans $\mathscr{L}(E)$. Alors r_0 est un point singulier de f ; de plus si ce point singulier est un pôle, il est d'ordre maximal sur le cercle $\{z \in \mathbb{C} \, ; \, |z| = r_0\}$.*

Si $B \in \mathscr{L}(E)$ est un opérateur positif, avec $r(B) > 0$, en appliquant ce lemme à la fonction

$$f(z) := R(r(B)/z, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r(B)} \right)^{n+1} B^n,$$

(définie sur le disque $|z| < 1$) on conclut que $r(B)$ est un point singulier de la résolvante $\lambda \mapsto R(\lambda, B)$, et que par conséquent $r(B) \in \sigma(B)$. (On notera que si $r(B) = 0$, alors $\sigma(B) = \{0\}$; on dit que B est topologiquement nilpotent). De plus si on suppose que B est positif et compact, avec $r(B) > 0$, le rayon spectral $r(B)$ est nécessairement une valeur propre de B : c'est le théorème de Krein-Rutman que nous énonçons maintenant.

12.4 Théorème de Krein-Rutman. *Soient E l'un des espaces de Banach donnés dans (12.2) et B un opérateur compact et positif de E dans lui-même de rayon spectral $r(B) > 0$. Alors $r(B)$ est un pôle de la résolvante $R(\lambda, B)$ (donc valeur propre de B), d'ordre maximal sur le cercle*

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r(B)\}\,,$$

et il existe $u \in E \setminus \{0\}$ *avec* $u \geq 0$ *telle que* $Bu = r(B)u$. *De plus le même résultat est vrai dans* E' *pour l'adjoint* B^*, *i.e.* $r(B)$ *est valeur propre de* B^* *et il existe* $v \in E' \setminus \{0\}$ *avec* $v \geq 0$ *tel que* $B^*v = r(B)v$.

Pour illustrer l'utilisation du théorème de Krein-Rutman dans le cas des opérateurs elliptiques, considérons par exemple l'opérateur L donné par (10.2), en supposant que les coefficients a_{ij}, b_i, c sont dans $C(\overline{\Omega})$ et que $c \geq 0$ (on suppose ici que Ω est connexe, borné et régulier) et que $p \geq N$. Comme les hypothèses du théorème 11.3 sont satisfaites, d'après ce dernier théorème pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe un unique $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $Lu = f$. De plus le principe du maximum d'Aleksandrov 10.5 implique que si $f \leq 0$ alors $u \leq 0$: autrement dit l'opérateur $B := L^{-1}$ défini par $Bf := u$ est un opérateur positif et compact de $L^p(\Omega)$ dans lui-même puisque son image est contenue dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (dont l'injection en particulier dans $L^p(\Omega)$ est compacte d'après le théorème 8.16). Par conséquent d'après le théorème de Krein-Rutman 12.4, le rayon spectral $r(B)$ est valeur propre de B pour une fonction propre $\varphi \geq 0$. En posant $\lambda_1 := 1/r(B)$, on voit que φ est fonction propre de L et satisfait $L\varphi = \lambda_1\varphi$. En fait cette relation, en utilisant le théorème 11.3 et les injections de Morrey-Sobolev, implique que si les coefficients sont de classe C^∞, alors $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Pour montrer ce résultat dans le cas $N \geq 3$, on peut se baser sur le lemme de Brezis-Kato 11.7 (on notera que pour $N \leq 2$, on a $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour $2 \leq p < \infty$).

De même en utilisant le principe du maximum de Hopf 10.4, on déduit que $\varphi > 0$ et on peut également montrer que λ_1, qui est la plus petite valeur propre de L, est simple (voir *Exercices*).

La caractérisation suivante de la première valeur propre d'un opérateur comme L donné par (10.2) est intéressante, car dans ce cas il n'y a pas de caractérisation variationnelle des valeurs propres (voir par exemple M.H. Protter & H.F. Weinberger [133, Chapter 2, § 8], et *Exercices*).

12.5 Théorème. *Soient* Ω *un ouvert borné connexe de* $\mathbb{R}^N$, *et* L *un opérateur du second ordre comme dans (10.2). On suppose que les coefficients* a_{ij}, b_i *et* c *sont dans* $C(\overline{\Omega})$. *Soit* $\varphi \not\equiv 0$, *une fonction de* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *qui vérifie* $\varphi = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et* $Lu = \lambda\varphi$. *Alors pour toute fonction* $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *telle que* $v(x) > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$ *on a :*

$$\lambda \geq \inf_{x \in \Omega} \frac{Lv(x)}{v(x)}\,.$$

En particulier si $\lambda = \lambda_1$, *la première valeur propre de* L, *alors*

$$\lambda_1 = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}\,;\ \exists v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ v > 0 \ \text{ dans } \ \Omega,\ Lv \geq \lambda v\right\}.$$

13. Dérivées et points critiques

Il existe plusieurs notions de *dérivées* pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous commençons par celle de la *dérivée directionnelle*.

13.1 Définition. *Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \omega$ et $z \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tz \in \omega$, on dit que F admet (au point u) une dérivée dans la direction z si la limite*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $F'_z(u)$.

On notera qu'une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in X$, sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directionnelle de F existe pour certains $z \in X$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

13.2 Définition. *Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $\ell \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t} = \langle \ell, z \rangle.$$

On posera $F'(u) := \ell$.

On remarquera de nouveau qu'une fonction G-dérivable n'est pas nécessairement continue. On introduit enfin la dérivée classique (ou la dérivée au sens de Fréchet). (On utilise la notation de Landau $o(x)$ pour désigner une fonction de x telle que $\lim_{\|x\| \to 0} o(x)/\|x\| = 0$).

13.3 Définition. *Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X et $F : \omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in \omega$, on dit que F est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $\ell \in X'$, tel que :*

$$\forall v \in \omega \qquad F(v) - F(u) = \langle \ell, v - u \rangle + o(v - u).$$

Si F est différentiable, ℓ est unique et on note $F'(u) := \ell$. L'ensemble des fonctions différentiables de $\omega \to \mathbb{R}$ sera noté $C^1(\omega, \mathbb{R})$.

On notera que si F est différentiable au sens de Fréchet, alors F est continue. En général il est plus commode de travailler avec la notion de G-dérivée, car on n'a qu'à considérer l'application $t \mapsto F(u+tw)$ (pour w fixé dans X) définie dans un intervalle $[0, \varepsilon[$. C'est pour ne pas alourdir ce qui suit que l'on n'introduira pas des notations différentes pour distinguer la G-dérivée et la dérivée de Fréchet. S'il y a risque de confusion, on précisera dans quel sens la notation $F'(u)$ doit être comprise. Une autre raison de ne pas introduire des notations différentes, c'est qu'il y a de façon naturelle un lien entre ces deux notions de dérivée. En effet on a le résultat suivant :

13.4 Proposition. *Soit F une fonction continue de ω dans $\mathbb{R}$ et G-dérivable dans un voisinage de $u \in \omega$. On désigne par $F'(v)$ la G-dérivée de F en v et on suppose que l'application $v \mapsto F'(v)$ est continue au voisinage de u. Alors*

$$F(v) = F(u) + \langle F'(u), v-u\rangle + o(v-u),$$

c'est à dire que F est différentiable au sens de Fréchet et sa dérivée (classique) coïncide avec $F'(u)$.

Démonstration. En considérant, pour $u \in \omega$ fixé et v assez voisin de u, l'application $t \mapsto F(u+t(v-u))$ définie sur l'intervalle $[0,1]$, on peut écrire :

$$F(v) = F(u) + \langle F'(u), v-u\rangle + h(u, v-u),$$

où, par commodité, on a posé :

$$h(u, v-u) := \int_0^1 \langle F'(u+t(v-u)) - F'(u), v-u\rangle dt.$$

Il s'agit donc de voir que $h(u, v-u)$ est un $o(v-u)$. Or $w \mapsto F'(w)$ étant continue au voisinage de u, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|w-u\| < \delta \Longrightarrow \|F'(w) - F'(u)\| < \varepsilon.$$

Par conséquent si $\|v-u\| < \delta$, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |\langle F'(u+t(v-u)) - F'(u), v-u\rangle| &\leq \|F'(u+t(v-u)) - F'(u)\| \times \\ &\qquad \times \|v-u\| \\ &\leq \varepsilon \|v-u\|, \end{aligned}$$

ce qui, en intégrant sur $[0,1]$, donne $|h(u, v-u)| \leq \varepsilon\|v-u\|$, pourvu que $\|v-u\| < \delta$. □

Voici enfin les notions de point critique et de valeur critique qui nous occuperont dans la suite de ce cours :

13.5 Définition. *Soient X un espace de Banach, $\omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \omega$ est un* **point critique** *de J, si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un* **point régulier** *de J.*
Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une **valeur critique** *de J, s'il existe $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une* **valeur régulière** *de F.*

Souvent, lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = 0$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = 0$ est l'*équation d'Euler* satisfaite par le point critique u.

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonction $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ est un point *extrémal*, c'est à dire un point où F atteint un *minimum* ou un *maximum*, local ou global. Une classe importante de fonctions atteignant leur minimum est constituée par (certaines) fonctions convexes que nous étudierons un peu plus loin, après avoir vu ce que signifient une valeur critique ou un point critique pour une fonctionnelle définie sur une variété, en introduisant la notion de multiplicateurs de Lagrange.

14. Multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de *contraintes* ou sur une variété. C'est pourquoi on doit préciser le sens qu'on donne à un point critique ou à une valeur critique sur un ensemble de contraintes.

14.1 Définition. *Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de* **contraintes** *:*

$$S := \{v \in X; F(v) = 0\}\,.$$

On suppose que pour tout $u \in S$, on a $F'(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou bien de classe C^1 sur un voisinage de S ou encore C^1 sur S) on dit que $c \in \mathbb{R}$ est **valeur critique** *de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(u) = c$ et $J'(u) = \lambda F'(u)$. Le point u est un* **point critique** *de J sur S et le réel λ est appelé* **multiplicateur de Lagrange** *pour la valeur critique c (ou le point critique u).*

Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = \lambda F'(u)$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'*équation d'Euler-Lagrange* (ou l'équation d'Euler) satisfaite par le point critique u sur la contrainte S.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant qui établit l'existence de multiplicateurs de Lagrange. Rappelons auparavant le théorème des fonctions implicites (voir par exemple J. Dieudonné [57, théorème 10.2.1]) :

14.2 Théorème. *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach, Ω un ouvert de $X \times Y$ et $f \in C^1(\Omega, Z)$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \Omega$ est tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et que $\partial_y f(x_0, y_0)$ est un homéomorphisme (linéaire) de Y sur Z. Il existe alors $\omega \subset X$ voisinage connexe de x_0 et une unique application $\varphi \in C^1(\omega, Y)$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et pour tout $x \in \omega$ on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$. De plus si $x \in \omega$ et $f(x, y_*) = 0$ alors $y_* = \varphi(x)$. La dérivée φ' est donnée par :*

$$\varphi'(x) = -\left(\partial_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \left(\partial_x f(x, \varphi(x))\right).$$

14.3 Proposition. *Sous les hypothèses et notations de la définition 14.1, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Démonstration. Comme $F'(u_0) \neq 0$, il existe $w \in X$ tel que

$$\langle F'(u_0), w\rangle = 1.$$

Si $X_0 := \ker F'(u_0)$, on a $X = X_0 \oplus \mathbb{R}w$. Soit alors la fonction Φ de $X_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\Phi(v, t) := F(u_0 + v + tw).$$

On a $\Phi(0, 0) = 0$ et

$$\partial_t \Phi(0,0) = \langle F'(u_0), w\rangle = 1, \qquad \partial_v \Phi(0,0) = F'(u_0)_{|X_0} = 0.$$

Le théorème des fonctions implicites 14.2 appliqué à Φ et au point $(0,0)$ de $X_0 \times \mathbb{R}$, permet de voir que dans un voisinage ω de $0 \in X_0$, il existe $T : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi(v, T(v)) = 0$ pour tout $v \in \omega$ et on a : $T(0) = 0$, $T'(0) = 0$. Donc il existe un voisinage $\Omega \subset X$ de u_0, tel que

$$u \in \Omega \text{ et } \ F(u) = 0 \iff u = u_0 + v + T(v)w \quad \text{avec } \ v \in \omega.$$

Si $\widetilde{J} : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$, est définie par $\widetilde{J}(v) = J(u_0 + v + T(v)w)$, on voit que $\widetilde{J}$ atteint son minimum en $0 \in \omega$. Par conséquent $\langle \widetilde{J}'(0), v\rangle = 0$ pour tout $v \in X_0$. Or d'après la définition de $\widetilde{J}$ et la propriété de T, on sait que si $v \in X_0$ on a $\langle \widetilde{J}'(0), v\rangle = \langle J'(u_0), v\rangle$. On en conclut que $\langle J'(u_0), v\rangle = 0$ pour tout $v \in X_0$ et que $\ker J'(u_0) \supset \ker F'(u_0)$: par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$. □

14.4 Remarque. En fait, comme on peut le voir au cours de la démonstration, il suffit que u_0 soit un extrémum local pour que le résultat soit encore vrai. □

Pour montrer l'existence de multiplicateurs de Lagrange dans le cas où l'ensemble S est défini par un nombre fini de contraintes, on aura besoin du lemme algébrique suivant (voir *Exercices* pour la démonstration).

14.5 Lemme. *Soient X un espace vectoriel et des formes linéaires $f_0, f_1, \ldots, f_m$ sur X. On suppose que :*

$$\bigcap_{1\le j\le m} \ker(f_j) \subset \ker(f_0).$$

Alors il existe des réels $(\lambda_j)_{1\le j\le m}$ tels que : $f_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j$.

En utilisant ce lemme et en procédant comme dans la démonstration ci-dessus, on peut montrer la généralisation suivante de l'existence d'un multiplicateur de Lagrange.

14.6 Lemme. *Soient $F_1, \ldots, F_m \in C^1(X, \mathbb{R})$ et :*

$$S := \{u \in X; 1 \le j \le m \quad F_j(u) = 0\}.$$

Soit J une fonction de classe C^1 dans un voisinage de S à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \min_{v\in S} J(v)$ et que les formes linéaires $F_1'(u_0)$, $F_2'(u_0), \ldots, F_m'(u_0)$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que

$$J'(u_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j F_j'(u_0).$$

14.7 Remarque. Sous les hypothèses de la proposition 14.3, supposons que S soit défini par une contrainte d'inégalité :

$$S := \{v \in X \ ; \ F(v) \geq 0\}\,.$$

Si $u_0 \in S$ est un point critique de J sur S (par exemple un point de minimum de J sur S) et si on a $F(u_0) > 0$, on dit que la contrainte F n'est pas saturée. Dans ce cas on peut montrer que le multiplicateur de Lagrange λ est nul. □

14.8 Exemple. Soient H un espace de Hilbert et $B = B^*$ un opérateur auto-adjoint compact sur H tel que $(Bv_0|v_0) > 0$ pour un $v_0 \in H$. Soient $F(u) := (u|u) - 1$ et $J(u) := (Bu|u)$. Alors $S := \{u \ ; \ F(u) = 0\}$ est précisément la sphère unité de H, et on peut montrer qu'il existe $u_0 \in S$ tel que

$$J(u_0) = \mu_1 := \max_{v \in S} J(v).$$

En effet, si $(u_n)_n$ est une suite de S telle que $J(u_n) \to \mu_1$, on peut supposer (en extrayant au besoin une sous-suite notée encore $(u_n)_n$) que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans H-faible et B étant compact on a $Bu_n \to Bu_0$ dans H. Par conséquent $J(u_n) \to J(u_0)$, ce qui signifie que $J(u_0) = \mu_1 > 0$ et que $u_0 \neq 0$. Par ailleurs d'après (2.1), si $\theta := \|u_0\|$, on a $0 < \theta \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = 1$. On ne peut pas avoir $\theta < 1$, car sinon en posant $\widetilde{u} := u_0/\theta$, on aurait $\widetilde{u} \in S$ et $J(\widetilde{u}) = \theta^{-2}\mu_1 > \mu_1$, contrairement à la définition de μ_1. On en conclut que $u_0 \in S$ et que μ_1 est atteint par u_0.

Par conséquent, d'après la proposition 14.3, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'(u_0) = 2\lambda u_0$ ou encore $Bu_0 = \lambda u_0$ et $\|u_0\| = 1$. En multipliant (au sens du produit scalaire de H) cette dernière égalité par u_0 on en déduit :

$$\mu_1 := (Bu_0|u_0) = \lambda(u_0|u_0) = \lambda$$

ce qui signifie que $\lambda = \mu_1$ est une valeur propre de B (d'ailleurs c'est la plus grande). En fait, comme on le verra au chapitre 4, on peut montrer que toutes les valeurs propres de B peuvent être obtenues comme valeurs critiques de J sur S, par un procédé de min max. □

14.9 Exemple. Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. On considère, sur l'espace $H_0^1(\Omega)$:

$$S := \left\{v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ F(v) = 0\right\}, \qquad \text{avec} \ \ F(v) := \int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx - 1\ ,$$

$$J(v) := \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Montrons d'abord qu'il existe $u_0 \in S$ tel que

$$J(u_0) = \mu := \min_{v \in S} J(v).$$

En effet en considérant une suite minimisante $(v_n)_n$, d'après l'inégalité de Poincaré 8.18 on sait que cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et on peut supposer que $v_n \rightharpoonup v_0$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible. On a donc d'après (2.1)

$$J(v_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n) = \mu. \tag{14.1}$$

Par ailleurs, puisque $(N-2)(p+1) < 2N$, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov 8.16, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ est compacte et on en déduit que $v_n \to v_0$ dans $L^{p+1}(\Omega)$. En particulier $F(v_0) = 0$, $v_0 \in S$ et par définition de μ on a $J(v_0) \geq \mu$: ce qui joint à (14.1) montre que μ est atteint sur S.

Alors d'après la proposition 14.3 on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'(v_0) = \lambda(p+1)|v_0|^{p-1}v_0$, ou encore :

$$-2\Delta v_0 = \lambda(p+1)|v_0|^{p-1}v_0.$$

En multipliant par v_0, en intégrant et en effectuant une intégration par parties sur le terme de gauche, on obtient :

$$2J(v_0) = \lambda(p+1) = 2\mu.$$

On en tire $\lambda = \frac{2\mu}{p+1}$, c'est à dire $-\Delta v_0 = \mu|v_0|^{p-1}v_0$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Comme $\mu > 0$, en posant $u := \mu^{\frac{1}{p-1}}v_0$ on obtient une solution non nulle de l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'ailleurs, on peut montrer que l'on peut choisir la suite minimisante $(v_n)_n$ telle que $v_n \geq 0$ et on obtient ainsi une solution $u \geq 0$ et de classe C^∞ dans Ω (voir *Exercices*).

On notera que la première partie de l'argument ci-dessus fonctionne lorsque $p = 1$, mais dans ce cas on obtient $\mu = \lambda_1$ la première valeur propre et $\varphi_1 = v_0$ une première fonction propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω. □

15. Fonctions convexes

On rappelle ci-dessous quelques propriétés bien connues des ensembles et des fonctions convexes.

15.1 Définition. *Soit X un espace vectoriel. On dit qu'une partie K de X est convexe si :*

$$\forall x,\, y \in K, \qquad \forall \theta \in [0,1], \qquad \theta x + (1-\theta)y \in K.$$

Lorsque K est convexe et $J : K \to \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que J est convexe si :

$$\forall\, x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad J(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta J(x) + (1-\theta)J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si pour tous $x, y \in K$ avec $x \neq y$ et $\theta \in]0,1[$ on a :

$$J(\theta x + (1-\theta)y) < \theta J(x) + (1-\theta)J(y).$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach (cf. par exemple H. Brezis [28, théorème III.7]) on montre le résultat suivant :

15.2 Proposition. *Soient X un espace de Banach et $K \subset X$ un convexe. Alors K est fermé si, et seulement si, K est faiblement fermé.*

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note :

$$[J \leq \lambda] := \{x \in K \,;\, J(x) \leq \lambda\}\,. \tag{15.1}$$

On dit que J est *semi-continue inférieurement* (en abrégé s.c.i.) lorsque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $[J \leq \lambda]$ sont fermés dans X. Il est facile de vérifier que si J est convexe, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles $[J \leq \lambda]$ sont convexes, mais la réciproque est fausse.

Rappelons qu'une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est convexe si pour $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ on a :

$$\frac{\varphi(\tau_1) - \varphi(0)}{\tau_1} \leq \frac{\varphi(\tau_2) - \varphi(0)}{\tau_2}.$$

Noter aussi que si J est convexe, alors la fonction

$$\tau \mapsto J((1-\tau)x + \tau y)$$

définie sur $[0,1]$ (pour $x, y \in K$ fixés), est convexe. On en déduit que pour $0 < \tau_1 < \tau_2$ on a

$$\frac{J(x + \tau_1(y-x)) - J(x)}{\tau_1} \leq \frac{J(x + \tau_2(y-x)) - J(x)}{\tau_2}. \tag{15.2}$$

On peut également montrer qu'une fonction convexe semi-continue inférieurement définie sur un ensemble convexe d'intérieur non vide est continue, et même localemment lipschitzienne. Pour toutes ces propriétés voir *Exercices*. La caractérisation suivante de certaines fonctions convexes est utile.

15.3 Lemme. *Soient K un convexe et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction G-dérivable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *J est convexe.*
(ii) *Pour tous $x, y \in K$ on a $J(y) \geq J(x) + \langle J'(x), y - x\rangle$.*
(iii) *J' est monotone c'est à dire que :*

$$\forall x, y \in K, \qquad \langle J'(y) - J'(x), y - x\rangle \geq 0.$$

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) : En effet si $\tau \in]0,1[$, alors l'inégalité de convexité s'écrit

$$J(x + \tau(y-x)) - J(x) \leq \tau(J(y) - J(x))$$

d'où l'on déduit (ii) en divisant par τ et en le faisant tendre vers 0.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : En échangeant le rôle de x et de y dans (ii) on a :

$$\langle J'(x), y - x\rangle \leq J(y) - J(x)$$
$$\langle J'(y), x - y\rangle \leq J(x) - J(y)$$

ce qui, en additionnant, donne (iii).
(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Pour $\tau \in [0,1]$, soit $\varphi(\tau) := J(x + \tau(y-x))$. Comme

$$\varphi'(\tau) = \langle J'(x + \tau(y-x)), y-x\rangle,$$

la propriété (iii) exprime le fait que φ' est croissante : en particulier $\varphi'(\tau s) \leq \varphi'(s)$ pour $0 \leq \tau, s \leq 1$. Par conséquent on a

$$\varphi(\tau) - \varphi(0) = \int_0^\tau \varphi'(\sigma)d\sigma = \tau \int_0^1 \varphi'(\tau s)\, ds \leq \tau(\varphi(1) - \varphi(0)),$$

ce qui signifie que J est convexe. □

Pour les fonctions strictement convexes on a la caractérisation suivante (voir *Exercices*).

15.4 Lemme. *Soient K un convexe et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction G-dérivable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *J est strictement convexe.*
(ii) *Pour tous $x, y \in K$, avec $x \neq y$, on a $J(y) > J(x) + \langle J'(x), y-x\rangle$.*
(iii) *J' est strictement monotone i.e.*

$$\forall x, y \in K, \quad x \neq y \qquad \langle J'(y) - J'(x), y-x\rangle > 0.$$

16. Quelques opérateurs continus

Dans l'étude de nombreuses équations aux dérivées partielles nous aurons à considérer des opérateurs *locaux* définis par des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous dirons qu'une fonction $(x, s) \mapsto f(x, s)$, définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est *mesurable en x, continue en s* si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{(16.1)} \qquad \begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } f(\cdot, s) \text{ est mesurable sur } \Omega\,; \\ \text{p.p. en } x \in \Omega \text{ la fonction } f(x, \cdot) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On dit parfois que f est une *fonction de Caratheodory*. On a le résultat suivant :

16.1 Lemme. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p, q < \infty$ des réels et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (16.1). On suppose qu'il existe $b \geq 0$ et $a \in L^q(\Omega)$ tels que la condition de croissance :*

$$\text{(16.2)} \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. sur } \Omega, \qquad |f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b|s|^{p/q}$$

est satisfaite. Pour toute fonction u mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, on définit un opérateur B en posant $(Bu)(x) := f(x, u(x))$. Alors B est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u. D'après la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (cf. proposition 4.11) il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_i})_i$ telles que

$$u_{n_i} \to u, \qquad |u_{n_i}| \leq g \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On en déduit que p.p. sur Ω on a $f(x, u_{n_i}(x)) \to f(x, u(x))$ et

$$|f(x, u_{n_i}(x))| \leq a(x) + b|g(x)|^{p/q}.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée on conclut que $Bu_{n_i} \to Bu$ dans $L^q(\Omega)$. Ainsi la suite $(Bu_n)_n$ est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ et admet comme unique point limite Bu : par conséquent toute la suite $(Bu_n)_n$ converge vers Bu dans $L^q(\Omega)$, ce qui prouve que B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. □

On remarquera que la condition (16.2) est tout simplement l'expression du fait que si $u \in L^p(\Omega)$ alors Bu (qui est définie presque partout sur Ω) est dans $L^q(\Omega)$. Le lemme précédent montre que si l'opérateur B est défini partout sur $L^p(\Omega)$, il y est continu. En réalité on peut montrer la réciproque du lemme 16.1 : si B envoie $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, alors la condition de croissance (16.2) est satisfaite (et en particulier B est continu). Ici nous nous bornerons à démontrer cette réciproque dans le cas plus simple où la fonction f ne dépend pas de x, i.e. $f(\cdot, s) \equiv f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (pour le cas général voir Krasnosel'skii [90, pages 20–32]).

16.2 Lemme. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p, q < \infty$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour toute fonction u définie p.p. sur Ω on définit $(Bu)(x) := f(u(x))$. On suppose que si $u \in L^p(\Omega)$, on a $Bu \in L^q(\Omega)$. Il existe alors $a \geq 0, b \geq 0$ tels que*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad |f(s)| \leq a + b|s|^{p/q}. \tag{16.3}$$

En particulier B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. En remplaçant $f(s)$ par $f(s) - f(0)$ on peut se ramener au cas où $f(0) = 0$, ce que nous allons faire pour la suite (remarquer que si Ω n'est pas de mesure finie on doit nécessairement avoir $f(0) = 0$). Si la condition de croissance (16.3) n'est pas satisfaite, alors pour tout $n \geq 1$ il existe $s_n \in \mathbb{R}$ tel que $|s_n| \geq 1$ et :

$$|f(s_n)| \geq n^{1/q}(1 + |s_n|^{p/q}).$$

Il est clair que l'on peut supposer que la suite $|s_n|$ est croissante et que $|s_n| \to \infty$. Par conséquent on peut choisir une partie mesurable $\Omega_0 \subset \Omega$ de mesure finie et des ensembles mesurables $A_n \subset \Omega_0$ deux à deux disjoints tels que $\mathrm{mes}(A_n) = \mathrm{mes}(\Omega_0)/[(1 + |s_n|^p)n^2]$. En considérant la fonction $u := \sum s_n 1_{A_n}$, on voit que $u \in L^p(\Omega)$. Mais on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u(x))|^q dx = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} |f(s_n)|^q &\geq \sum_{n\geq 1} n(1 + |s_n|^{p/q})^q \mathrm{mes}(A_n) \\ &\geq \sum_{n\geq 1} n(1 + |s_n|^p)\mathrm{mes}(A_n) = +\infty,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $Bu \notin L^q(\Omega)$: autrement dit B, en tant qu'opérateur de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, n'est pas défini en u. On en conclut donc que la fonction f satisfait la condition de croissance (16.3) et, d'après le lemme 16.1, B est continu. □

16.3 Remarque. L'opérateur B défini ci-dessus est un opérateur *local* en ce sens que la valeur de $(Bu)(x)$ dépend uniquement de celle de u au point x. Dans la littérature des opérateurs locaux comme l'opérateur B défini au lemme 16.1 sont parfois appelés *opérateurs de Nemitsky* ou encore *opérateurs de superposition*. On peut montrer, en admettant l'hypothèse du continu, qu'en fait tout opérateur local, en ce sens que $B(1_A u) = 1_A Bu$ pour tout ensemble mesurable A, est un opérateur de superposition. Pour des références concernant les diverses propriétés de ce type d'opérateurs suivant celles de la fonction f, on pourra consulter J. Appell [7]. □

16.4 Remarque. Des opérateurs B du type de ceux que l'on vient de voir ne sont pas continus de $L^p(\Omega)$-faible dans $L^q(\Omega)$-faible, sauf si f est affine, c'est à dire que $f(\cdot, s) = a(\cdot) + b(\cdot)s$, avec $a \in L^q$ et $b \in L^r(\Omega)$, où $r := \frac{p}{p-q}$ et $q \leq p$ (voir *Exercices*). □

Sur l'exemple suivant on voit qu'il n'est pas aisé de construire des opérateurs locaux du type précédent qui soient de classe C^1.

16.5 Exemple. Soient $\Omega :=]0,1[$, et $(Bu)(\cdot) := \sin(u(\cdot))$. On voit facilement que B est continu de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$. Montrons qu'il n'est pas de classe C^1 sur $L^2(0,1)$. En effet si B était différentiable au sens de Fréchet sur $L^2(0,1)$ à l'origine, on devrait avoir :

$$Bu = Lu + o(u, \|u\|_{L^2})$$

où L est un opérateur linéaire continu de $L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$. Mais on remarque que si l'application $u \mapsto Bu$ est considérée de $L^\infty(0,1)$ dans lui-même, alors elle est différentiable en 0 et pour tout $u \in L^\infty(0,1)$ on a :

$$Bu = u + o(u, \|u\|_\infty)$$

et par conséquent on doit avoir $L = I$, l'application identité. (Ici on fait apparaître le fait que le terme $o(u, \|u\|)$ dépend de la norme de l'espace dans lequel on considère l'opérateur B). Par ailleurs considérant la suite : $u_n := 1_{]0,1/n[}$ on a $\|u_n\|_{L^2} \to 0$ et :

$$\|Bu_n - u_n\|^2 = \frac{1}{n}(\sin(1) - 1)^2 = \|u_n\|^2_{L^2}(1 - \sin(1))^2$$

ce qui montre que $Bu_n - u_n$ n'est pas un $o(u_n, \|u_n\|_{L^2})$.

Cependant on peut montrer que si Ω est de mesure finie et $1 \leq q < p \leq \infty$, alors $Bu := \sin(u(\cdot))$, considéré comme opérateur de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, est de classe C^1. En effet si $0 < \varepsilon \leq 2$ est tel que $(1+\varepsilon)q \leq p$, on sait qu'il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{R}$ on ait $|\sin(z) - z| \leq C(\varepsilon)|z|^{1+\varepsilon}$. On en conclut que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ on a :

$$\|Bu - u\|_q \leq C(\varepsilon)\,\|u\|^{1+\varepsilon}_{(1+\varepsilon)q} \leq C(\varepsilon, p, q, |\Omega|)\,\|u\|^{1+\varepsilon}_p,$$

ce qui montre que B est différentiable au sens de Fréchet à l'origine et que $B'(0) = I$, l'injection canonique de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. On montre de la même manière que B est différentiable en un point quelconque de $L^p(\Omega)$. □

En fait il n'y a pas beaucoup d'opérateurs du type précédent qui soient de classe C^1 de $L^2(\Omega)$ dans lui-même. Il est clair que si $f(x,s) := a(x)+b(x)s$, avec $a \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$, alors B est de classe C^1. Cependant on peut montrer que ce sont les seuls opérateurs de ce type de classe C^1, comme l'indique le résultat suivant (voir *Exercices* pour la démonstration) :

16.6 Propostion. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (16.1). On pose $Bu := f(\cdot, u(\cdot))$. Alors B est de classe C^1 de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $a \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ tels que $f(\cdot, s) = a(\cdot) + b(\cdot)s$.*

Signalons enfin le résultat suivant dû à M. Marcus & V.J. Mizel [110–113] ; voir aussi L. Boccardo & F. Murat [23, théorème 4.2] (on pourra consulter également l'article de revue de J. Appell [7]) :

16.7 Théorème. *Soient $1 \le q \le p < N$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $Bu := f(u(\cdot))$, pour une fonction de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors B est un opérateur continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ si, et seulement si, f est localement lipschitzienne et sa dérivée (qui existe presque partout sur $\mathbb{R}$) satisfait la condition de croissance*

$$\exists a, b \ge 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \qquad |f'(s)| \le a + b|s|^{N(p-q)/(qN-qp)} .$$

Si $1 \le p \le \infty$, et f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $B(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla B(u) = f'(u)\nabla u$ p.p. sur Ω ; de plus lorsque $1 \le p < \infty$, l'opérateur B est continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans lui-même (lorsque $p = \infty$ en général B n'est pas continu sur $W^{1,\infty}(\Omega)$).

Dans le paragraphe suivant nous considérons certaines fonctionnelles sur les espaces de Sobolev, définies à l'aide d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

17. Quelques fonctionnelles différentiables

Dans un premier temps nous considérons des fonctionnelles définies sur les espaces $L^p(\Omega)$. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable en x, continue en s, c'est à dire vérifiant la condition de Caratheodory (16.1). On pose

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,\sigma)d\sigma. \tag{17.1}$$

De même, lorsque cela a un sens, on définit une fonctionnelle V par

$$V(u) := \int_\Omega F(x,u(x))dx. \tag{17.2}$$

Nous allons préciser dans quelles conditions $u \mapsto V(u)$ est continue ou de classe C^1. Notons tout d'abord le résultat suivant qui découle du lemme 16.1 :

17.1 Lemme. *On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$ et F une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p. \text{ sur } \Omega, \quad |F(x,s)| \leq a(x) + b|s|^p. \tag{17.3}$$

Alors si F vérifie (16.1), V définie par (17.2) est continue sur L^p.
En particulier si $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie (16.1), et s'il existe $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$ et $p' := p/(p-1)$, et $b_0 \geq 0$ tels que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p. \text{ sur } \Omega, \quad |f(\cdot,s)| \leq a_0(\cdot) + b_0|s|^{p-1}, \tag{17.4}$$

alors F et V étant données par (17.1) et (17.2), V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(\cdot, u(\cdot))$.

Démonstration. Si F vérifie la condition (17.3), le lemme 16.1 dit que l'application $u \mapsto F(\cdot, u(\cdot))$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et par conséquent V est continue sur $L^p(\Omega)$.

Lorsque l'hypothèse porte sur f, la condition (17.4) implique :

$$|F(x,s)| \leq a_0(x)|s| + \frac{1}{p}b_0|s|^p \leq \frac{1}{p'}|a_0(x)|^{p'} + \frac{1}{p}(1+b_0)|s|^p,$$

où on utilise l'inégalité de Young $\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}$. On en déduit, en utilisant la première partie du lemme, que V est continue de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Pour montrer que V est de classe C^1, on va montrer que V est G-dérivable et que la G-dérivée est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. En posant

$$\varphi(t,x) := \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} - f(x, u(x))v(x),$$

on a

$$\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx = \int_\Omega \varphi(t,x)dx.$$

Or il existe $\theta(t,x) \in]0,1[$ tel que :

$$|\varphi(t,x)| = |f\left(x, u + \theta(t,x)tv(x)\right) - f(x,u(x))|\,|v(x)|.$$

Ainsi, d'une part on a $\varphi(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, p.p. en $x \in \Omega$ et d'autre part, on a la majoration :

$$|\varphi(t,x)| \leq 2\left(a_0(x) + b_0\left(|u(x)| + |v(x)|\right)^{p-1} + b_0|u(x)|^{p-1}\right)|v(x)|.$$

Comme le second membre de l'inégalité ci dessus est dans $L^1(\Omega)$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de dire que

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_\Omega f(x,u(x))\ v(x)dx\right] = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\varphi(t,x)dx = 0.$$

Ainsi la G-dérivée $V'(u)$ existe et on a pour tout $v \in L^p(\Omega)$:

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx,$$

i.e. $V'(u) = f(\cdot, u)$. De plus la condition de croissance (17.4) imposée à f et le lemme 16.1 impliquent que l'opérateur $u \mapsto f(\cdot, u)$ (c'est à dire V') de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ est continu. Finalement la proposition 13.4 implique que V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ (on aura noté que ce dernier résultat n'est pas vrai si $p = 1$). □

Bien que les résultats qui suivent puissent s'exprimer de manière générale pour les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour les besoins de la suite du cours, on va surtout étudier la fonctionnelle V sur les espaces $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ (voir *Exercices* pour le cas général). Rappelons que pour $N \geq 3$, on a posé $2^* := \frac{2N}{N-2}$ et que les inégalités de Sobolev expriment le fait que $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ et que cette injection est continue ; de même si l'ouvert Ω est, par exemple, borné et de classe C^1 (voir paragraphe § 8), alors on a $H^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ et l'injection est continue. En utilisant le lemme 17.1, on peut montrer facilement (on notera que $(2^*)' = 2N/(N+2)$) :

17.2 Corollaire. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$, et $F : \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction vérifiant (16.1), V étant définie par (17.2). On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que p.p. sur Ω et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait $|F(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{2^*}$. Alors V est continue sur $H_0^1(\Omega)$. En particulier si $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie (16.1), F étant définie par (17.1), s'il existe $a_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ et $b_0 \geq 0$ tels que*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |f(x,s)| \leq a_0(x) + b_0|s|^{\frac{N+2}{N-2}},$$

alors V est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(\cdot, u)$. Si de plus Ω est de classe C^1 et borné, les mêmes propriétés sont vraies en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$.

Lorsque $N = 2$, on sait que pour tout $p \geq 2$ fini, on a $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et par conséquent, si f vérifie la condition (17.4) pour un $p \geq 2$, la fonction V est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ (un résultat analogue subsiste pour $H^1(\Omega)$ si Ω est par exemple borné et de classe C^1). En utilisant l'inégalité de Trudinger-Moser, on peut montrer le résultat suivant (voir *Exercices*) :

17.3 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction vérifiant (16.1) et V définie par (17.2). On suppose que pour tout $\delta > 0$ il existe $a \in L^1(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. sur Ω on ait $|F(x,s)| \leq a(x) + b\exp\left(\delta|s|^2\right)$. Alors V est continue sur $H_0^1(\Omega)$. En particulier si $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie (16.1), F étant définie par (17.1), en supposant que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$, $a_0 \in L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ et $b_0 \geq 0$ tels que*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |f(x,s)| \leq a_0(x) + b_0\exp\left(\delta|s|^2\right),$$

alors V est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(\cdot, u)$. Si de plus Ω est de classe C^1 et borné, les mêmes propriétés sont vraies en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$.

Il faut noter que le cas de la dimension $N = 1$ est très particulier car dans ce cas on a $H^1(\mathbb{R}) \subset C_0^{0,1/2}(\mathbb{R})$ et par suite sans imposer une quelconque condition de croissance à l'infini sur $s \mapsto f(\cdot, s)$, la fonction V est de classe C^1 sur $H^1(\Omega)$. Plus précisément (voir *Exercices* pour la démonstration) :

17.4 Proposition. *Soit Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (16.1). On suppose de plus que $f(\cdot, \cdot)$ vérifie, pour tout $s \in \mathbb{R}$*

$$\text{p.p. sur } \Omega, \qquad |f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b(\cdot)g(s)$$

où $a, b \in L^1(\Omega)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et telle que $g(s) = O(s)$ lorsque $s \to 0$.
Alors F et V étant définies par (17.1) et (17.2), V est de classe C^1 sur $H^1(\Omega)$. □

De façon analogue on peut montrer la proposition suivante (rappelons que si X_1, X_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel Z, on note $X_1 + X_2$ le sous-espace des éléments $z \in Z$ qui s'écrivent comme $z = x_1 + x_2$ avec $x_i \in X_i$) :

17.5 Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (16.1).*
(i) *Si $N \geq 3$, on suppose qu'il existe $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |f(\cdot, s)| \leq a(\cdot)|s| + b|s|^{\frac{N+2}{N-2}}.$$

(ii) *Si $N = 2$, on suppose que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ et $a \in L^{1+\varepsilon}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$, $b \in \mathbb{R}_+$ tels que :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega \qquad |f(\cdot, s)| \leq a(\cdot)|s| + b \exp\left(\delta |s|^2\right).$$

Alors F et V étant définies par (17.1) et (17.2), V est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. Si Ω est borné et de classe C^1, alors V est de classe C^1 sur $H^1(\Omega)$. Dans chaque cas on a $V'(u) = f(\cdot, u)$. □

Nous allons ensuite montrer le résultat suivant qui est important pour la suite.

17.6 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p > 2$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (16.1) et $f(\cdot, 0) = 0$. On suppose que p.p. en $x \in \Omega$, l'application $s \mapsto f(x, s)$ est de classe C^1 et qu'il existe $a \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |\partial_s f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b|s|^{p-2}.$$

Alors F et V étant définies par (17.1) et (17.2), V est de classe C^2 sur $L^p(\Omega)$ alors que $V' : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p/(p-1)}(\Omega)$ est uniformément lipschitzienne sur les bornés de $L^p(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(\cdot, u)$, et $V''(u) = \partial_s f(\cdot, u)$. Plus précisément pour $\varphi, \psi \in L^p(\Omega)$ on a :

$$V''(u)[\varphi,\psi]=\int_\Omega \partial_s f(x,u(x))\varphi(x)\psi(x)dx.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que la condition de croissance sur la dérivée de f implique, pour tout $s\in\mathbb{R}$:

$$\text{p.p. sur } \Omega,\qquad |f(\cdot,s)|\le a(\cdot)|s|+\frac{b}{p-1}|s|^{p-1}.$$

Par conséquent le lemme 17.1 montre que V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ et que

$$\langle V'(u),\varphi\rangle=\int_\Omega f(x,u(x))\varphi(x)dx.$$

Pour montrer que V' est G-dérivable sur $L^p(\Omega)$, pour $0<t<1$ et φ,ψ dans $L^p(\Omega)$ on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\left[\langle\ V'(u+t\psi)-V'(u),\varphi\rangle\right]&-\int_\Omega \partial_s f(x,u(x))\varphi(x)\psi(x)dx\\ &=\int_\Omega\left[\partial_s f(x,u(x)+\theta(t,x)\psi(x))-\partial_s f(x,u(x))\right]\varphi(x)\psi(x)dx,\end{aligned}$$

où $\theta(t,x)\ \in]0,1[$. En prenant la valeur absolue dans les deux membres et en utilisant la majoration

$$\begin{aligned}&\left|\left[\partial_s f(x,u(x)\ +\theta(t,x)\psi(x))-\ \partial_s f(x,u(x))\right]\varphi(x)\psi(x)\right|\\ &\qquad\le 2\left(a(x)+b(|u|^{p-2}+|\psi|^{p-2})\right)|\varphi(x)\psi(x)|,\end{aligned}\tag{17.5}$$

on voit que comme on a $\varphi,\psi\in L^p(\Omega)$ et que $\frac{p-2}{p}+2\frac{1}{p}=1$, d'après l'inégalité de Hölder le second membre de l'inégalité (17.5) est dans $L^1(\Omega)$. On conclut comme précédemment, en faisant tendre t vers zéro et en utilisant le théorème de la convergence dominée, que $V''(u)[\varphi,\psi]$ existe et on obtient finalement :

$$V''(u)[\varphi,\psi]=\int_\Omega \partial_s f(x,u(x))\varphi(x)\psi(x)dx.$$

Pour voir enfin que V' est uniformément lipschitzienne sur les bornés de $L^p(\Omega)$, on écrit :

$$\begin{aligned}\left|\langle V'(u+\psi)-V'(u),\varphi\rangle\right|&=\left|\int_0^1\int_\Omega \partial_s f(x,u(x)+t\psi(x))\varphi(x)\psi(x)dxdt\right|\\ &\le\int_0^1\int_\Omega\left[a(x)+b(|u(x)|+|\psi(x)|)^{p-2}|\varphi(x)\psi(x)|\right]dxdt,\end{aligned}$$

d'où on déduit, en utilisant l'inégalité de Hölder, que si $\|\psi\|_p\le R$:

$$\|V'(u+\psi)-V'(u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\le C(\|u\|_p,R)\|\psi\|_p,$$

et on voit ainsi que $u\mapsto V'(u)$ est uniformément lipschitzienne sur les bornés de $L^p(\Omega)$. Pour voir que V' est de classe C^1, il suffit de montrer que la dérivée de

Gâteaux $V''(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans l'espace des formes bilinéaires sur $L^p(\Omega)$. En effet pour $u, w, \varphi, \psi \in L^p(\Omega)$, et $\|\varphi\|_p, \|\psi\|_p \leq 1$ on a :

$$|(V''(u+w) - V''(u))\ [\varphi, \psi]| \leq \\ \|\partial_s f(\cdot, u+w) - \partial_s f(\cdot, u)\|_{\frac{p}{p-2}}\ \|\varphi\|_p\ \|\psi\|_p.$$

Donc en désignant par $\mathscr{L}_2$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $L^p(\Omega)$, on a

$$\|V''(u+w) - V''(u)\|_{\mathscr{L}_2} \leq \|\partial_s f(\cdot, u+w) - \partial_s f(\cdot, u)\|_{p/(p-2)},$$

et comme d'après l'hypothèse (i) et le lemme 16.1, l'opérateur $u \mapsto \partial_s f(\cdot, u(\cdot))$ est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p/(p-2)}(\Omega)$, on conclut que V'' est continue. □

17.7 Remarque. Il faut bien noter qu'en général, des fonctionnelles du type de V ne sont pas de classe C^2 sur $L^2(\Omega)$. Par exemple si

$$F(s) := 1 - \cos(s), \quad \text{et} \quad V(u) := \int_\Omega (1 - \cos(u(x)))dx,$$

on voit facilement que V est de classe $C^{1,1}$ sur $L^2(\Omega)$ mais n'est pas de classe C^2 : en effet comme nous l'avons signalé plus haut dans l'exemple 16.5, on sait que $V'(u) = \sin(u)$ n'est pas différentiable au sens de Fréchet sur $L^2(\Omega)$. □

En utilisant le théorème d'injection de Sobolev, et en appliquant la proposition 17.6 avec $p := 2^*$ on obtient le résultat suivant :

17.8 Corollaire. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (16.1) et $f(\cdot, 0) = 0$. On suppose que p.p. en $x \in \Omega$, l'application $s \mapsto f(x, s)$ est de classe C^1 et qu'il existe $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |\partial_s f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b|s|^{4/(N-2)}.$$

Alors F et V étant définies par (17.1) et (17.2), V est de classe C^2 sur $H^1_0(\Omega)$ et $V' : H^1_0(\Omega) \longrightarrow L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ est uniformément lipschitzienne sur les bornés de $H^1_0(\Omega)$. Si Ω est borné et de classe C^1, alors V possède les mêmes propriétés en remplaçant $H^1_0(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$. Dans chaque cas on a $V'(u) = f(\cdot, u)$ et $V''(u) = \partial_s f(\cdot, u)$, i.e. pour $\varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$ (ou bien dans $H^1(\Omega)$) on a :

$$V''(u)[\varphi, \psi] = \int_\Omega \partial_s f(x, u(x))\varphi(x)\psi(x)dx.$$

Lorsque $N = 2$, on a un résultat semblable, sauf que la croissance de $f(\cdot, s)$ en s peut être exponentielle.

17.9 Proposition. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (16.1) et $f(\cdot, 0) = 0$. On suppose que p.p. en $x \in \Omega$, l'application $s \mapsto f(x, s)$ est de classe C^1 et que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ et $a \in L^{1+\varepsilon}(\Omega) + L^\infty(\Omega)$, $b \geq 0$ tels que*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p.\ sur\ \Omega, \qquad |\partial_s f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b \exp(\delta |s|^2).$$

Alors F et V étant définies par (17.1) et (17.2), V est de classe C^2 sur $H_0^1(\Omega)$ et V' est uniformément lipschitzienne sur les bornés de $H_0^1(\Omega)$. Si Ω est borné et de classe C^1, alors V possède les mêmes propriétés en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$. Dans chaque cas on a $V'(u) = f(\cdot, u)$ et $V''(u) = \partial_s f(\cdot, u)$ i.e. pour $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ (ou bien dans $H^1(\Omega)$) on a :

$$V''(u)[\varphi, \psi] = \int_\Omega \partial_s f(x, u(x)) \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Démonstration. La démarche est la même que dans la preuve de la proposition 17.6, sauf qu'au lieu de (17.5), on a

$$\begin{aligned} &| \left[\partial_s f(x,\ u(x) + \theta(t,x)\psi(x)) - \ \partial_s f(x, u(x))\right] \varphi(x)\psi(x)| \\ &\qquad \leq 2 \left(a(x) + b \exp\left(\delta(|u(x)| + |\psi(x)|)^2\right)\right) |\varphi(x)\psi(x)|, \end{aligned}$$

et de nouveau le second membre de cette inégalité est dans $L^1(\Omega)$, parce que pour tout q fini, on a $|\varphi\psi| \in L^q(\Omega)$ et pour $r \geq 1$ convenablement choisi (en fait $r = q'$) et $\delta > 0$ suffisamment petit, on sait que

$$\exp\left(\delta(|u(x)| + |\psi(x)|)^2\right) \in L^r(\Omega).$$

pour u, φ, ψ dans $H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Trudinger-Moser. □

Exercices du chapitre 1

Exercice 1. (Théorème de Stampacchia). Soient H un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de H.

1) Montrer que pour tout $u \in H$ il existe un unique $u_0 \in K$ tel que $\|u-u_0\| = \min_{v\in K} \|u-v\|$. Ce point sera noté $P_{_K} u$, projection de u sur K.

2) Montrer que ce point est caractérisé par

$$\begin{cases} u_0 \in K, \ \forall v \in K \\ (u-u_0|v-u_0) \leq 0, \end{cases}$$

et en déduire que $P_{_K}$ est une contraction de H sur K.

3) Soit A une application de H dans lui-même telle que pour des constantes $\alpha, C_0 > 0$ on ait pour tous $u, v \in H$:

$$(Au-Av|u-v) \geq \alpha\|u-v\|^2, \quad \|Au-Av\| \leq C_0\|u-v\|.$$

Pour $f \in H$ fixé on considère l'application

$$\Phi(v) := P_{_K}\left(\theta f - \theta Av + v\right).$$

Montrer que si $\theta > 0$ est assez petit, Φ est une contraction stricte de K dans lui-même et admet un point fixe unique $u \in K$.

4) En déduire que pour $f \in H$ donné, l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{trouver } \ u \in K \ \text{ tel que } \ \forall v \in K \\ (Au|v-u) \geq (f|v-u)\ , \end{cases}$$

admet une solution unique.

5) En appliquant ce qui précède dans le cas où $K = H$ et A est déterminé par une forme bilinéaire continue et coercive $a(\cdot,\cdot)$ (i.e. $(Au|v) = a(u,v)$), déduire le lemme de Lax-Milgram.

6) Généraliser les résultats des questions **3)** et **4)** au cas où l'opérateur A est seulement lipschitzien sur les bornés de H (i.e. pour tout $R > 0$ il existe une constante $C_0(R)$ telle que pour $\|u\|, \|v\| \leq R$ on ait $\|Au-Av\| \leq C_0(R)\|u-v\|$).

Exercice 2. Soient $N = 2$ et l'ouvert

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < 1, \quad y < |x|^{1/2}\right\}.$$

On pose $\mathrm{sgn}(x) := 1$ si $x \geq 0$ et $\mathrm{sgn}(x) := -1$ si $x < 0$; puis pour $1 < \beta < 2$:

$$u(x,y) := \begin{cases} \mathrm{sgn}(x)\, y^\beta & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Vérifier que si $\beta < 2\alpha < 2$, alors $u, \partial_x u$ et $\partial_y u$ sont continues jusqu'au bord de Ω, mais que $u \notin C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Exercice 3. Soient $0 < \theta \leq 1$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $a \in \Omega$, on pose $f_a(x) := |x-a|^\theta$. Montrer que si $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \geq 2$. En déduire que pour $k \geq 0$, l'espace $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ n'est pas séparable.

Exercice 4. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H. On suppose qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in X$ on ait : $a(u,u) \geq \lambda_1 \|u\|^2$.

Montrer que la fonction J définie par $J(u) := a(u,u) - \lambda\|u\|^2$ est convexe pour tout $\lambda \leq \lambda_1$, et que J est strictement convexe si $\lambda < \lambda_1$.

Exercice 5. Soit a un élément de $\mathbb{R}^n$, écrit sous forme de vecteur colonne. On pose $A := aa^*$, la matrice d'élément générique $a_i a_j$ pour $1 \leq i,j \leq n$. Montrer que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de A sont données par

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \qquad \lambda_n = |a|^2.$$

(Ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). En déduire que :

$$\det(I + A) = 1 + |a|^2.$$

Exercice 6. Voici une application intéressante du théorème de changement de variable.

1) Soit A une matrice symétrique et définie positive d'ordre n. Montrer que

$$(\det(A))^{-1/2} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-(Ax|x)/2\right] dx.$$

2) Soit $\mathfrak{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques et définies positives d'ordre n. Montrer que $\mathfrak{S}_n^+$ est convexe et que la fonction $A \mapsto \log\det(A)$ est concave sur $\mathfrak{S}_n^+$ (on dit que $A \mapsto \det(A)$ est log-concave).

Exercice 7. Soient S la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ et $d\sigma$ la mesure superficielle sur S. En utilisant le fait que $d\sigma$ est la seule mesure superficielle sur S invariante par rotation, montrer que pour toute fonction f continue sur S on a (en notant ϖ_N *l'aire* de la sphère S) :

$$\int_S f(\sigma) d\sigma = (2\pi)^{-N/2}\, \varpi_N \int_{\mathbb{R}^N} f\left(\frac{x}{|x|}\right) \exp(-|x|^2/2) dx.$$

Exercice 8. Soient E un espace de Banach, $(u_n)_n$ une suite de E et $(f_n)_n$ une suite de E'. Montrer que si $u_n \rightharpoonup u$ dans E-faible et $f_n \to f$ dans E', alors $\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$.

Montrer que le même résultat est vrai si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup f$ dans E'-faible*. Donner des contre-exemples montrant que si $u_n \rightharpoonup u$ et $f_n \rightharpoonup f$ alors on n'a pas nécessairement $\langle f, u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, u_n\rangle$.

Exercice 9. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites de fonctions mesurables sur un ensemble Ω avec $u_n \in L^\infty(\Omega)$, $v_n \in L^1(\Omega)$ et $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$. On suppose que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(\Omega)$-faible*, et que $v_n \to v$ presque partout sur Ω. Montrer que

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)v_n(x)dx.$$

Exercice 10. Soient $F, G \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{G(s)} = 0,$$

et $(u_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $F(u_n(x))$ tend vers $v(x)$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. On suppose que $(F(u_n))_n$ et $(G(u_n))_n$ sont bornées dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que si $B \subset \mathbb{R}^N$ est mesurable borné, alors $(F(u_n))_n$ est équi-intégrable sur B et

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |F(u_n(x)) - v(x)|\, dx = 0.$$

2) On suppose de plus que $F(s)/G(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$, et que $u_n(x)$ tend vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, uniformément en n. Montrer que $F(u_n)$ tend vers v dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 11. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_j})_j$ telle que pour $j \geq 1$:

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_1 \leq 2^{-j}\ .$$

2) Soit $u_k := \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$. Montrer que la suite $(u_k)_k$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction u, et que $u < \infty$ presque partout.

3) En déduire qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ et une sous-suite $(f_{n_j})_j$ de $(f_n)_n$, ainsi qu'une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telles que

$$\text{p.p. sur } \Omega \quad f_{n_j} \to f, \qquad \text{et} \qquad |f_{n_j}| \leq g.$$

(C'est la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée).

4) De manière générale, montrer le résultat précédent pour une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ (on montre par la même occasion que les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach).

Exercice 12. On sait que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique $n = 2^k + j$ avec $k \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^k - 1$. On considère la suite $(f_n)_n$ définie sur $[0, 1[$ par

$$f_n := 1_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}[} \quad \text{si} \;\; n = 2^k + j, \quad \text{et} \;\; 0 \leq j \leq 2^k - 1.$$

Vérifier que $f_n \to 0$ dans $L^1(0,1)$ mais ne converge pas p.p.

Exercice 13. Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$. Est-ce qu'une inégalité du type

$$|f(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|,$$

est vraie en général ? (Considérer $f_n(x) := (1 - \cos(nx))\,\varphi(x)$, où $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ est fixée, et montrer que $f_n \rightharpoonup \varphi$ dans L^p).

Exercice 14. Soit $m \geq 0$ un entier. En utilisant la transformation de Fourier montrer que $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si, la fonction $\widehat{u}$ vérifie $(1+|\cdot|^2)^{m/2}\,\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Vérifier également que pour des constantes $c_1, c_2 > 0$ on a

$$c_1 \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq \|(1 + |\cdot|^2)^{m/2}\,\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c_1 \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}\,.$$

Exercice 15. Sur $\mathbb{R}$ on considère la fonction $u(x) := (1 - |x|)^+$. En utilisant la caractérisation des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ par la transformation de Fourier, déterminer tous les $s \in \mathbb{R}$ tels que $u \in H^s(\mathbb{R})$.

Exercice 16. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$. On considère :

$$K := \{u \in L^p(\Omega)\,;\; u \geq f \text{ p.p. sur } \Omega\}\,.$$

Montrer que K est fermé pour la topologie faible de $L^p(\Omega)$.

Exercice 17. On montre ici que les fonctions de $W^{1,\infty}(\Omega)$ sont les fonctions lipschitziennes, pourvu que Ω soit un ouvert de classe C^1 ou lipschitzien.

1) Montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ alors, pour $i \gneqq 1$, les dérivées $\partial_i u$ existent presque partout sur $\mathbb{R}^N$.

2) Montrer qu'une fonction u appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si, u est continue et :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^N \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} < \infty\,. \tag{1}$$

3) Montrer qu'une fonction u appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que $\varphi_n \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$ et $(\varphi_n)_n$ est bornée dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

4) Montrer que si Ω est un ouvert borné de classe C^1 (ou lipschitzien), les éléments de $W^{1,\infty}(\Omega)$ sont précisément les fonctions lipschitziennes sur $\overline{\Omega}$. En déduire qu'une fonction lipschitzienne est presque partout dérivable.

5) Soit $\Omega :=]-1,+1[^2 \setminus ([0,1] \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$. Construire une fonction u, affine sur $\omega :=]0,1[\times]0,1[$, et nulle sur $\Omega \setminus \omega$, telle que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et u n'est pas lipschitzienne sur Ω.

Exercice 18. Soit Ω la boule $B(0,1/2)$ de $\mathbb{R}^N$. Vérifier que la fonction

$$u(x) := |x|^{-N} \left|\log |x|\right|^{-\alpha},$$

est dans $L^1(\Omega)$, pour $\alpha > 1$.

1) Soit $p > 1$. En choisissant convenablement α, exhiber une fonction qui est dans $L^1(\Omega)$, mais qui n'est pas dans $L^p(\Omega)$. Pour $q < p$, exhiber une fonction de $L^q(\Omega)$ qui ne soit pas dans $L^p(\Omega)$.

2) De même si $1 \leq q < p$, exhiber une fonction de $W^{1,q}(\Omega)$ qui n'est pas dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 19. On va montrer ici les inégalités de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (voir propositions 8.10 et 8.12) dans le cas particulier où $p = 1$:

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N), \qquad \|u\|_{N/(N-1)} \leq C(N) \prod_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_1^{1/N}. \tag{1}$$

1) On suppose que $N = 1$. En écrivant que $u(x) = \pm \int_{\mp\infty}^{x} u(s)ds$, montrer que $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|u_x\|_1$.

Pour montrer (1), on va faire un raisonnement par récurrence : on suppose que (1) est établie pour N et on va la montrer pour $N+1$. Le point générique de $\mathbb{R}^{N+1}$ sera noté $y := (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et on considère $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour simplifier, on prendra $C(N) := 1$, mais le lecteur patient est invité à calculer une meilleure constante que 1.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/N} \leq \prod_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_j} u(t,x)| dx\right)^{1/N}.$$

3) En déduire que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/N} dt \leq \prod_{j=1}^{N} \|\partial_{x_j} u\|_1^{1/N}.$$

4) Vérifier que $|u(t,x)|^{(N+1)/N} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(s,x)| ds\right)^{1/N} |u(t,x)|$, pour tout (t,x).

5) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{\frac{N+1}{N}} dx \leq \|\partial_t u\|_1^{1/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{\frac{N}{N-1}} dx\right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

6) Déduire de **3)** et **5)**, l'inégalité (1) pour $N+1$.

7) Déduire de (1) les inégalités de Sobolev pour $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, ainsi que pour $W_0^{1,1}(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert quelconque.

Exercice 20. On reprend ici la démonstration des inégalités de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev dans le cas général (voir propositions 8.10 et 8.12, ainsi que *Exercice 19*). Soient $1 < p < N$ et $p^* := \frac{Np}{N-p}$; en partant de l'inégalité (1) de l'*Exercice 19* on va montrer :

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N), \qquad \|u\|_{p^*} \leq C(N,p) \prod_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_p^{1/N}. \tag{2}$$

1) Vérifier que si $m > 1$ est un réel et $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, alors $|u|^m \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :

$$\partial_j \left(|u|^m\right) = m \, \mathrm{sgn}(u) \, |u|^{m-1} \partial_j u.$$

2) En appliquant l'inégalité (1) de l'*Exercice 19* à $|u|^m$ (pour $m > 1$), montrer que :

$$\|u\|_{mN/(N-1)}^m \leq m \|u\|_{(m-1)p/(p-1)}^{m-1} \prod_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_p^{1/N}.$$

3) Trouver m tel que $\frac{mN}{N-1} = \frac{(m-1)p}{p-1}$. Vérifier que $m > 1$ équivaut à $1 < p < N$.

4) En remarquant que m trouvé dans la question précédente vérifie $\frac{mN}{N-1} = p^*$, et en utilisant **2)**, établir l'inégalité (2) avec la constante $C(N,p) := \frac{p(N-1)}{N-p}$.

5) Déduire de (2) les inégalités de Sobolev pour $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ainsi que pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert quelconque.

Exercice 21. Soient $p > 1$, $m \geq 1$ tels que $mp = N$. Si Ω désigne la boule unité de $\mathbb{R}^N$, on pose, pour $x \neq 0$:

$$u(x) := \log \log \left(\frac{4}{|x|} \right).$$

1) Montrer que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ mais que u n'appartient pas à $L^\infty(\Omega)$.

2) De même en supposant que $m := 1$, trouver tous les $\gamma > 0$ tels que $v(x) := (\log(4/|x|))^\gamma$ soit dans $W^{1,N}(\Omega)$. Vérifier que l'exposant $\frac{N}{N-1}$ dans l'inégalité de Trudinger-Moser (proposition 8.15) ne peut pas être amélioré.

3) Lorsque Ω est un ouvert *quelconque* et $mp = N$ (avec $p > 1$ et $m \geq 1$), en utilisant la fonction u construire une fonction positive $f \in W^{m,p}(\Omega)$ telle que f soit non bornée au voisinage de tout point $x_0 \in \Omega$.

4) Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ouvert non borné et de mesure finie

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ 0 < y < \exp(-x^2) \right\}.$$

On fixe $p \geq 1$. Donner une fonction u définie sur Ω telle que pour tout $m \geq 0$ et tout $q > p$ on ait $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et $u \notin L^q(\Omega)$ (on pourra considérer la fonction $\exp\left(\alpha x^2 - (1+x^2)^{1/2}\right)$ pour une valeur adéquate de $\alpha > 0$).

Exercice 22. On se propose de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ pour $m \geq 0$ entier et $1 \leq p < \infty$. Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive telle que $\varphi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\varphi_0(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$; on suppose de plus que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_0(x)dx = 1$. Pour $n \geq 1$ entier on pose $\rho_n(x) := n^N\varphi_0(nx)$ et $\zeta_n(x) := \varphi_0(x/n)$.

1) Montrer que si $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ alors la tronquée $u_n := \zeta_n u$ tend vers u dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ à support compact. Montrer que $v_n := u * \rho_n$ tend vers u dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

3) Déduire de ce qui précède que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 23. On montre ici un théorème de prolongement pour différentes classes de fonctions définies sur un ouvert Ω. Pour un aperçu plus général des problèmes de prolongement de fonctions définies sur une partie Ω de $\mathbb{R}^N$ on pourra consulter E. Stein [153, chapter VI].

1) Soit $k \geq 0$ un entier. Montrer qu'il existe une unique famille $c_1, c_2, \dots c_{k+1}$ de réels tels que pour $0 \leq i \leq k$ on ait

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-j)^{-i}c_j = 1.$$

On rappelle à ce propos que le déterminant de Van der Monde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_{k+1}^k \end{pmatrix}$$

est nul si et seulement si $x_m = x_\ell$ pour deux entiers $m \neq \ell$. Pour $k = 0, 1$ ou 2, calculer les familles c_j correspondantes.

Un élément $x \in \mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1} \times [0, +\infty[$ étant noté $(x', x_{_N})$, pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^N_+$ on définit son prolongement à $\mathbb{R}^N$ par

$$\widetilde{P}_k(f) := \begin{cases} f(x', x_{_N}) & \text{si } \ x_{_N} \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j f\left(x', \frac{-x_{_N}}{j}\right) & \text{si } \ x_{_N} < 0. \end{cases}$$

2) Montrer que le prolongement $\widetilde{P}_k$ est un opérateur linéaire continu de $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ dans $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, pour tout entier $k \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.

3) Montrer que le prolongement $\widetilde{P}_k$ est un opérateur linéaire continu de $W^{k,p}(\mathbb{R}^N_+)$ dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout entier $k \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$. Vérifier en particulier que pour tout $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap L^q(\mathbb{R}^N_+)$ avec $1 \leq q \leq \infty$ on a

$$\|u\|_{q,\mathbb{R}^N_+} \leq \|\widetilde{P}_k(u)\|_{q,\mathbb{R}^N} \leq C(k)\|u\|_{q,\mathbb{R}^N_+}.$$

4) Soient Ω un ouvert borné de classe $C^{k,\alpha}$ et Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. Montrer qu'il existe une application linéaire continue P_k de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C_c^{k,\alpha}(\Omega_1)$ telle que $P_k(u) = u$ sur $\overline{\Omega}$. Vérifier également que si une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées $\partial^\beta u$ continues et de classe $C^{0,\alpha}$ jusqu'au bord $\partial\Omega$, pour des multi-indices β tels que $|\beta| \leq k$, alors u a un prolongement dans $C_c^{k,\alpha}(\Omega_1)$. (En particulier on voit que, dans ce cas, les deux définitions que nous avons évoquées au paragraphe § 3 sont équivalentes).

5) Soient Ω un ouvert borné de classe C^k et Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. Montrer que pour $1 \leq p \leq \infty$ et $k \geq 0$ entier il existe une application linéaire continue P_k de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $W_0^{k,p}(\Omega_1)$ telle que $P_k(u) = u$ sur Ω. Vérifier en particulier que si $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q \leq \infty$ on a

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \|P_k(u)\|_{q,\Omega_1} \leq C(k)\|u\|_{q,\Omega}.$$

En réalité on peut construire un tel opérateur de prolongement en supposant seulement que Ω est lipschitzien : c'est le théorème de prolongement de Calderón, mais la construction en est beaucoup moins simple (voir par exemple R.A. Adams [2, theorem 4.32] et E. Stein [153, chapter VI, § 3]).

6) Soient $\Omega :=]0,1[^N$ le cube unité de $\mathbb{R}^N$ et Ω_1 un ouvert tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$. En prenant pour modèle le prolongement $\widetilde{P}_k$ de $\mathbb{R}^N_+$, montrer qu'il existe un opérateur de prolongement P_k de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C_c^{k,\alpha}(\Omega_1)$. Faire la même construction pour exhiber un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $W_0^{k,p}(\Omega_1)$ (on notera qu'ici Ω n'est pas de classe C^1).

Exercice 24. Déduire du théorème de prolongement de la question **5)** de l'*Exercice 23*, que si Ω est un ouvert borné de classe C^k, alors $C^k(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Exercice 25. Soient $1 \leq p \leq N$ et Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$. En utilisant le théorème de prolongement de la question **5)** de l'*Exercice 23*, on établira les résultats suivants (ici $p^* := Np/(N-p)$ si $p < N$ et $p^* := \infty$ si $p = N$).

1) Montrer l'inégalité de Sobolev pour les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$: si $p < N$ il existe une constante $C(p,\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

2) Montrer l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg pour les fonction de $W^{1,p}(\Omega)$: il existe une constante $C(p,\theta,\Omega)$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ avec $1 \leq r \leq \infty$ on ait

$$\|u\|_q \leq C\,\|u\|_r^{1-\theta}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\theta}\,,$$

où $q^{-1} = \theta(p^*)^{-1} + (1-\theta)r^{-1}$ et $\theta > 0$ si $p = N$.

3) Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour $q < p^*$.

4) En déduire que lorsque Ω est connexe, si $\omega \subset \Omega$ est de mesure strictement positive et

$$m(u) := \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega)} \int_\omega u(x)dx,$$

alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|u - m(u)\|_p \leq C \|\nabla u\|_p .$$

(C'est l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Considérer

$$\lambda_{2,p} := \inf \left\{ \|\nabla v\|_p^p \, ; \; v \in W^{1,p}(\Omega), \; \|v\|_p = 1, \; m(v) = 0 \right\},$$

puis montrer que $\lambda_{2,p}$ est atteint et $\lambda_{2,p} > 0$).

5) Déduire des questions précédentes la version suivante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg pour les fonction de $W^{1,p}(\Omega)$: si $\omega \subset \Omega$ est de mesure strictement positive, et Ω est connexe, il existe une constante $C(p, \theta, \omega, \Omega)$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ avec $1 \leq r \leq \infty$ on ait

$$\|u - m(u)\|_q \leq C \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta,$$

où $q^{-1} = \theta(p^*)^{-1} + (1-\theta)r^{-1}$ et $\theta > 0$ si $p = N$.

Exercice 26. Montrer que pour une fonction $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq p < \infty$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|^p dx' \leq p \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_N u(x)|^p dx.$$

En déduire que si Ω est un ouvert borné et connexe de classe C^1, alors l'opérateur de trace $\gamma_0(u)(\sigma) := u(\sigma)$ pour $\sigma \in \partial\Omega$, défini pour les fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$, se prolonge en un opérateur continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$, i.e.

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Exercice 27. Soient Ω un ouvert borné connexe de classe C^1 et un ensemble $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ de mesure strictement positive (i.e. $\int_{\Gamma_0} d\sigma > 0$). On pose

$$V_0 := \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) \, ; \; v = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0 \right\}.$$

1) Montrer que

$$\lambda_{1,p}(\Gamma_0) := \inf \left\{ \|\nabla v\|_p^p \, ; \; v \in V_0, \; \|v\|_p = 1 \right\}$$

est atteint et que $\lambda_{1,p}(\Gamma_0) > 0$.

2) En déduire cette version de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg : si $1 \leq p \leq N$, il existe une constante $C(p, \theta, \Gamma_0, \Omega)$ telle que pour tout $u \in V_0 \cap L^r(\Omega)$ avec $1 \leq r \leq \infty$ on ait

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta ,$$

où $q^{-1} = \theta(p^*)^{-1} + (1-\theta)r^{-1}$ et $\theta > 0$ si $p = N$.

Exercice 28. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, connexe et de classe C^1, et

$$m(u) := \mathrm{mes}(\Omega)^{-1} \int_\Omega u(x)dx$$

la moyenne de u sur Ω. On désigne par λ_2^{N} la deuxième valeur propre du problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Montrer que si C est une constante de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - m(u)\|_2 \leq C\,\|\nabla u\|_2,$$

alors on a $\lambda_2^{\mathrm{N}} C^2 \geq 1$, et que la meilleure constante est $(\lambda_2^{\mathrm{N}})^{-1/2}$.

Dans le cas où $N = 1$ et $\Omega :=]a, b[$, trouver les meilleures constantes dans l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$ ainsi que dans l'inégalité de Poincaré-Wirtinger sur $H^1(\Omega)$.

Exercice 29. Si $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction on note

$$e_{ij}(u) := \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right), \qquad |\nabla u|^2 := \sum_{i,j=1}^N |\partial_i u_j|^2\,.$$

1) Montrer que si $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ alors pour $1 \leq i, j \leq N$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u_j(x)\partial_j u_i(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u_i(x)\partial_j u_j(x)dx.$$

2) En déduire que pour pour toute fonction $u \in \left(H^1(\mathbb{R}^N)\right)^N$ on a :

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} |e_{ij}(u(x))|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \cdot u(x)|^2 dx.$$

(Ici $\nabla \cdot u := \mathrm{div}(u) := \sum_{i=1}^N \partial_i u_i$).

3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que pour toute fonction $u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N$ on a :

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} |e_{ij}(u(x))|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla \cdot u(x)|^2 dx.$$

(Si dans cette égalité on *oublie* le dernier terme de droite, on obtient l'inégalité de Korn sur $\left(H_0^1(\Omega)\right)^N$).

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, ou même lipschitzien. On peut montrer (voir par exemple O.A. Oleinik, A.S. Shamaev & G.A. Yosifian [124, chapter 1, § 2]) que

$$u \mapsto \|u\|^2 + \sum_{i,j=1}^{N} \|e_{ij}(u)\|^2$$

est une norme équivalente à la norme de $\big(H^1(\Omega)\big)^N$, où $\|\cdot\|$ est la norme de $\big(L^2(\Omega)\big)^N$ (on a ainsi l'inégalité de Korn dans $\big(H^1(\Omega)\big)^N$). En particulier si $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ est de mesure (superficielle) positive et

$$V_0 := \Big\{ v \in \big(H^1(\Omega)\big)^N \ ; \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0 \Big\} \ ,$$

alors pour des constantes $c_k > 0$, pour tout $u \in V_0$ on a

$$c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \|\nabla u\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \|e_{ij}(u)\|^2 \leq c_3 \|\nabla u\|^2 \leq c_4 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Exercice 30. Dans la suite, pour $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathrm{sgn}(t)$ le signe de t i.e.

$$\mathrm{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que si T_1 et T_2 sont deux distributions sur Ω, on écrit $T_1 \geq T_2$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ si pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$ on a $\langle T_1, \varphi \rangle \geq \langle T_2, \varphi \rangle$. On se propose de montrer ici *l'inégalité de Kato* : si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors on a $\Delta|u| \geq \mathrm{sgn}(u)\Delta u$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

1) Soient $j(t) := |t|$ et pour $\varepsilon > 0$, $j_\varepsilon(t) := (\varepsilon^2 + t^2)^{1/2} - \varepsilon$. Montrer que j_ε est convexe et que $0 \leq j_\varepsilon(t) \leq j(t)$. Vérifier aussi que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon(t) = j(t), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} j'_\varepsilon(t) = \mathrm{sgn}(t).$$

Quelle est la limite (dans un sens approprié) de $j''_\varepsilon(t)$?

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ fixée. Montrer que si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega j_\varepsilon(u(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega j(u(x))\varphi(x)dx.$$

3) Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ fixées. On suppose qu'une dérivée partielle (au sens des distributions) ∂u appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \partial(j_\varepsilon(u(x)))\, \varphi(x)dx = \int_\Omega \mathrm{sgn}(u(x))\partial u(x)\varphi(x)dx.$$

4) Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $\partial u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Vérifier que $\mathrm{sgn}(u)\partial u$ définit une distribution sur Ω.

5) Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $\partial u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que

$$\partial|u| = \mathrm{sgn}(u)\partial u \quad \text{ au sens de } \ \mathscr{D}'(\Omega).$$

(Noter que $\langle \partial|u|, \varphi\rangle = -\int_\Omega |u|\partial\varphi dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega j_\varepsilon(u)\partial\varphi dx$, et utiliser ce qui précède).

6) Soit $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ telle que pour $1 \le i \le N$, $\partial_i u \in L^2_{\rm loc}(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. Calculer $\Delta j_\varepsilon(u)$ et vérifier que c'est un élément de $L^1_{\rm loc}(\Omega)$. En déduire que si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\varphi \ge 0$, alors

$$\int_\Omega j_\varepsilon(u(x))\Delta\varphi(x)dx \ge \int_\Omega j'_\varepsilon(u(x))\Delta u(x)\varphi(x)dx.$$

7) Montrer que si $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ alors $j'_\varepsilon(u)\Delta u \to \mathrm{sgn}(u)\Delta u$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

8) Soit $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ telle que pour $1 \le i \le N$, $\partial_i u \in L^2_{\rm loc}(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. Montrer, en utilisant ce qui précède, que l'on a *l'inégalité de Kato*, i.e.

$$\Delta|u| \ge \mathrm{sgn}(u)\Delta u \qquad \text{au sens de} \quad \mathscr{D}'(\Omega).$$

9) Montrer, en utilisant la démarche précédente et un procédé de régularisation, que de manière générale si $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ vérifie $\partial_{ii} u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ pour un entier $i \gtreqless^{1}_{N}$, alors on a

$$\partial_{ii}|u| \ge \mathrm{sgn}(u)\partial_{ii}u \qquad \text{au sens de} \quad \mathscr{D}'(\Omega).$$

Exercice 31. On montre dans cet exercice le résultat de Brezis-Kato que nous avons énoncé au théorème 11.7 (voir H. Brezis & T. Kato [32]) : soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, avec $N \ge 3$ et $V \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. On suppose que $V^+ \in L^\infty(\Omega) + L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, et que $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifie $V^- u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et

$$-\Delta u + V^- u = V^+ u + g \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega),$$

alors si $g \in L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$ et $p \ge 2$, on a $u \in L^p(\Omega)$. On notera $\|\cdot\|$ la norme de $L^2(\Omega)$ et $\|\cdot\|_p$ la norme de $L^p(\Omega)$.

1) Soit $q \ge 0$ une fonction de $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que pour $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ on ait :

$$\int_\Omega q(x)|\varphi(x)|^2 dx \le \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2 + C(\varepsilon)\|\varphi\|^2.$$

(Ecrire $q = q1_{[q>\lambda]} + q1_{[q\le\lambda]}$ pour $\lambda > 0$ et montrer que

$$\int_\Omega q(x)|\varphi(x)|^2 dx \le \|q1_{[q>\lambda]}\|_{\frac{N}{2}}\|\varphi\|^2_{2^*} + \lambda\|\varphi\|^2,$$

puis utiliser l'inégalité de Sobolev). En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que

$$\int_\Omega V^+(x)|\varphi(x)|^2 dx \le \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2 + C_\varepsilon\|\varphi\|^2.$$

2) Montrer que

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \|\nabla\varphi\|^2 - \int_\Omega V(x)|\varphi(x)|^2 dx \ ; \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \|\varphi\|^2 = 1 \right\}$$

est fini.

3) Soient $\lambda > \lambda_1$ défini ci-dessus et $V_k^+ := \min(V^+, k)$ pour $k > 0$. Montrer que si $g \in L^2(\Omega)$, alors il existe un unique $w^k \in H_0^1(\Omega)$, avec $V^-|w^k|^2 \in L^1(\Omega)$, solution de

$$-\Delta w^k + V^- w^k + \lambda w^k = V_k^+ w^k + g.$$

4) On suppose que $g \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ avec $p > 2$ et pour k fixé on note (pour simplifier les notations) $\psi = w^k$, et on suppose que $\psi \in L^p(\Omega)$. On supposera, bien que cela ne soit pas essentiel, que $\lambda \geq 0$. En multipliant l'équation par $|\psi_n|^{p-2}\psi_n$ où

$$\psi_n := \psi 1_{[|\psi|\leq n]} + n\frac{\psi}{|\psi|} 1_{[|\psi|>n]},$$

montrer que

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \int_\Omega \left| \nabla \left(|\psi_n|^{\frac{p-2}{2}} \psi_n(x) \right) \right|^2 dx \\ \leq \int_\Omega V_k^+(x)|\psi||\psi_n(x)|^{p-1} dx + \int_\Omega |g(x)|\,|\psi_n(x)|^{p-1} dx.$$

5) En utilisant l'inégalité de Young ($ab \leq \varepsilon a^r + C(\varepsilon)b^{r'}$ avec $r' := r/(r-1)$) et l'injection de Sobolev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C dépendant uniquement de p, ε telle que

$$\|\nabla \left(|\psi_n|^{\frac{p-2}{2}} \psi_n \right)\|^2 \leq \varepsilon \|\nabla \left(|\psi_n|^{\frac{p-2}{2}} \psi_n \right)\|^2 + C\|g\|_p^p \\ + C\|\psi_n\|_p^p + k \int_{[|\psi|>n]} |\psi(x)|^p dx.$$

6) En déduire que $\|\psi\|_{\frac{p}{2}2^*} \leq C(p)\left(\|g\|_2 + \|g\|_p\right)$.

7) Montrer que lorsque $k \to \infty$, alors $w^k \rightharpoonup w$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible, où $w \in H_0^1(\Omega)$ avec $(V^-|w|^2 \in L^1(\Omega))$ est l'unique solution de

$$-\Delta w + V^- w + \lambda w = V^+ w + g.$$

et en déduire que si $g \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, alors $w \in L^{\frac{p}{2}2^*}(\Omega)$.

8) Déduire de l'étude précédente, le lemme de Brezis-Kato, et en particulier vérifier que si $-\Delta u = Vu$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, alors pour $2 \leq p < \infty$ on a $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$.

Exercice 32. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $a(\cdot) := (a(\cdot))_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément coercive, i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur Ω on a

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2.$$

On suppose que des fonctions $b_i, \beta_i \in L^\infty(\Omega) + L^N(\Omega)$ et $V \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ telle que $V^- \in L^\infty(\Omega) + L^{N/2}(\Omega)$ sont données. On pose

$$Au := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j \left(a_{ij}\partial_j u\right) + \sum_{i=1}^{N} \partial_i(b_i u) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i \partial_i u + Vu.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $V^+u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et $V^+u^2 \in L^1(\Omega)$, on ait

$$\langle Au, u\rangle + \lambda\|u\|^2 \geq (\alpha - \varepsilon)\|\nabla u\|^2.$$

(C'est un cas particulier de l'inégalité de Gårding. On pourra utiliser la question **1)** de l'*Exercice 31*).

Exercice 33. Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. On sait qu'en général l'équation $-\Delta\varphi = f$ avec $f \in L^1(\Omega)$ et $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ n'admet pas de solution appartenant à $H^1_0(\Omega)$ (car $L^1(\Omega)$ n'est pas contenu dans $H^{-1}(\Omega)$). Cependant si f a une forme particulière on peut résoudre cette équation dans $H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (voir H. Wente [164], ou par exemple H. Brezis & J.M. Coron [31, Appendix], dont nous suivons ici la démarche).

1) Soient $u, v \in C^2_c(\mathbb{R}^2)$ et $f := \partial_1 u\partial_2 v - \partial_2 u\partial_1 v$. En posant

$$\psi(x) := \frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\log|x-y|dy,$$

montrer que $-\Delta\psi = f$ dans $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $x^0 \in \mathbb{R}^2$ fixé. En utilisant les coordonnées polaires autour de x^0, on note $x = x^0 + (r\cos\theta, r\sin\theta)$ puis on pose $g(r,\theta) := u(x)$ et $h(r,\theta) := v(x)$. Vérifier que

$$\partial_1 u\partial_2 v - \partial_2 u\partial_1 v = \frac{1}{r}\left(g_r h_\theta - g_\theta h_r\right),$$

où $g_r := \partial_r g$ et $g_\theta := \partial_\theta g$. En déduire que

$$\psi(x^0) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \left[g_r h_\theta - g_\theta h_r\right](r,\theta)\log r\, drd\theta.$$

3) En notant que $g_r h_\theta - g_\theta h_r = (gh_\theta)_r - (gh_r)_\theta$, montrer que :

$$\begin{aligned}\psi(x_0) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} (gh_\theta)_r(r,\theta)\log r\, drd\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} g(r,\theta)h_\theta(r,\theta)\frac{1}{r}\, drd\theta\,.\end{aligned}$$

4) Soit $\widetilde{g}(r) := (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta$. On rappelle que d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on a :

$$\|g(r,\cdot)-\widetilde{g}(r)\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \|g_\theta(r,\cdot)\|_{L^2(0,2\pi)}.$$

En déduire que

$$\left|\int_0^{2\pi} g(r,\theta)h_\theta(r,\theta)d\theta\right| \leq \|g_\theta(r,\cdot)\|_{L^2(0,2\pi)}\,\|h_\theta(r,\cdot)\|_{L^2(0,2\pi)}\,.$$

5) Déduire de la question précédente et de **3)** que l'on a :

$$|\psi(x^0)| \leq \frac{1}{2\pi}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

6) Soient $u, v \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta\varphi = \partial_1 u\partial_2 v - \partial_2 u\partial_1 v & \text{dans } \Omega\,,\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ et que :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi}\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ .$$

(On pourra noter que $\Delta(\varphi-\psi)=0$, et utiliser le principe du maximum pour conclure que $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$). En déduire que

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ .$$

Etablir le même résultat lorsque $u, v \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$.

7) On suppose que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Montrer que l'équation (1) admet toujours une solution unique $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ et que pour une constante indépendante de u, v on a :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

(Utiliser un théorème de prolongement pour se ramener au cas précédent, et remarquer que φ ne change pas si on remplace u et v par $u-m(u)$ et $v-m(v)$ respectivement, où $m(w) := \mathrm{mes}(\Omega)^{-1}\int_\Omega w(x)dx$ est la moyenne de w ; puis utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans $H^1(\Omega)$).

8) En utilisant ce qui précède, conclure que pour $u, v \in H^1(\Omega)$, l'équation (1) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ et que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

9) En déduire que si $u, v \in H^1(\Omega)$, alors $\partial_1 u\partial_2 v - \partial_2 u\partial_1 v \in H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\|\partial_1 u\partial_2 v - \partial_2 u\partial_1 v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Montrer également que si $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v, w\rangle &= \int_\Omega \left(\partial_1 u(x)\partial_2 v(x) - \partial_2 u(x)\partial_1 v(x)\right) w(x)dx \\ &\leq C \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla w\right\|_{L^2(\Omega)} .\end{aligned}$$

10) Etablir le résultat précédent dans le cas où Ω est borné mais quelconque et $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Exercice 34. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On sait qu'en général si a_n, b_n sont deux suites de $(L^2(\Omega))^2$ qui convergent faiblement, on ne peut rien dire de la convergence de la suite des produits $(a_n \cdot b_n)_n$. Cependant dans certains cas particuliers on peut établir un résultat de convergence faible. Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème plus général disant que si, en plus, les suites $(\mathrm{div}(a_n))_n$ et $(\mathrm{rot}(b_n))_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, alors $a_n \cdot b_n$ converge dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ (c'est la compacité par compensation, voir F. Murat [121]). Dans la suite on considère deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de $H_0^1(\Omega)$ qui convergent faiblement respectivement vers u et v dans $H_0^1(\Omega)$.

1) Soit $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Vérifier que si $p > 2$, alors $u_n \partial_i w$ tend vers $u\partial_i w$ dans $L^2(\Omega)$-fort pour $i = 1, 2$.

2) Soient $f_n := \partial_1 u_n \partial_2 v_n - \partial_2 u_n \partial_1 v_n$ et $f := \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v$. Montrer que $(f_n)_n$ est bornée dans $H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, et que $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$ pour tout $q < 2$ (voir *Exercice 33*, question **9)**. On notera que si $p := q' := q/(q-1)$, pour $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}&\langle \partial_1 u_n \partial_2 v_n - \partial_2 u_n \partial_1 v_n, w\rangle = \\ &\qquad - \int_\Omega \left[\partial_1 w(x)\partial_2 v_n(x) - \partial_2 w(x)\partial_1 v_n(x)\right] u_n(x)dx\end{aligned}$$

et on utilisera la question précédente et l'*Exercice 8*).

3) En reprenant le résultat de la question **10)** de l'*Exercice 33*, on sait qu'il existe $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta\varphi_n = \partial_1 u_n \partial_2 v_n - \partial_2 u_n \partial_1 v_n.$$

Montrer que $(\varphi_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et que si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$-\Delta\varphi = \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v,$$

alors $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible.

4) Déduire des questions **2)** et **3)** que $\partial_1 u_n \partial_2 v_n - \partial_2 u_n \partial_1 v_n$ tend faiblement vers $\partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Exercice 35. On se propose de montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $1_{[u=0]}\nabla u = 0$ presque partout sur Ω. On suit ici la démonstration proposée par F. Almgren & E.H. Lieb [3]. Dans la suite $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est fixée.

1) Montrer que si ω est un ouvert de mesure finie de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite croissante de fonctions continues $(f_n)_n$ telle que $f_n \uparrow 1_\omega$ p.p. sur $\mathbb{R}$.

2) Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie et $A := u^{-1}(\omega)$. On pose $M(t) := \int_0^t 1_\omega(s)ds$. En remplaçant d'abord 1_ω par une suite $(f_n)_n$ comme à la question précédente, et $M(t)$ par $M_n(t) := \int_0^t f_n(s)ds$, montrer que pour $1 \leq i \leq N$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega [u(x) - M(u(x))]\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega (1 - 1_A(x))\,\partial_i u(x)\,\varphi(x)dx. \tag{1}$$

3) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure nulle et $A = u^{-1}(E)$. En considérant une suite d'ouverts ω_n contenant E et telle que $\mathrm{mes}(\omega_n)$ tend vers zéro, déduire de (1) que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega (1 - 1_A(x))\,\partial_i u(x)\,\varphi(x)dx.$$

En conclure que $\int_\Omega 1_A(x)\partial_i u(x)\,\varphi(x)dx = 0$ et que $1_A\partial_i u = 0$ p.p. sur Ω. En particulier pour tout $c \in \mathbb{R}$ on a $1_{[u=c]}\nabla u = 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 36. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et T une application linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même. On dit que T est un *opérateur local* si pour tout $u \in L^2(\Omega)$, le support de Tu est contenu dans celui de u. On va montrer que T est une multiplication, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\forall u \in L^2(\Omega), \qquad Tu = \varphi u. \tag{1}$$

1) Montrer que si $A \subset \Omega$ est mesurable et $u \in L^2(\Omega)$, alors : $T(1_A u) = 1_A Tu$.

2) On suppose que Ω est de mesure finie et on pose $\varphi := T(1_\Omega)$. Montrer que $\|\varphi\|_\infty \leq \|T\|$, où

$$\|T\| := \sup\{\|Tu\|_2\ ;\ \|u\|_2 \leq 1\}.$$

3) Montrer, dans le cas général, que $\varphi := T(1_\Omega)$ est dans $L^\infty(\Omega)$ et que (1) est vraie. Exprimer $\|T\|$ en fonction de φ.

4) Généraliser ce qui précède au cas d'un opérateur local d'un espace $L^p(\Omega)$ dans lui-même.

5) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, de classe C^1 à frontière bornée et $p > N$. On considère, sur $L^p(\Omega)$, un opérateur de multiplication T défini par $Tu := \varphi u$. Montrer que T est un opérateur continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans lui-même si, et seulement si, φ est dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 37. Montrer que si E, F sont des espaces de Banach et A est une application linéaire continue et injective de E sur F, alors $(A^{-1}, A(E))$ est un opérateur fermé. Donner un exemple d'une application linéaire A continue de E dans F et d'un domaine D tels que (A, D) ne soit pas un opérateur fermé.

Exercice 38. Dans l'espace $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N}^*)$ des suites sommables on considère l'opérateur $(A, D(A))$ défini par $Au := (nu_n)_{n\geq 1}$ pour u dans le domaine

$$D(A) := \left\{(u_n)_{n\geq 1}\ ;\ (nu_n)_{n\geq 1} \in \ell^1\right\}.$$

Montrer que $(A, D(A))$ est un opérateur fermé à domaine dense dans ℓ^1. Déterminer $(A^*, D(A^*))$ ainsi que l'adhérence de $D(A^*)$ dans ℓ^∞.

Exercice 39. Soient $E := C([0,1])$ et $D(A) := C^3([0,1])$. En considérant l'opérateur $Au := -u''$ pour $u \in D(A)$, montrer que $(A, D(A))$ n'est pas un opérateur fermé sur E.

Exercice 40. Soient $E := C([0,1])$ et $Au := -u''$ pour $u \in D(A)$, où

$$D(A) := \left\{u \in C^2([0,1])\ ;\ u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

Montrer que A est un opérateur fermé.

Exercice 41. $E := C([0,1])$, $D(A) := C^2([0,1])$ et $Au := -u''$. Montrer que A est un opérateur fermé. Déterminer son spectre.

Exercice 42. Soient E, F deux espaces de Banach, $(A, D(A))$ un opérateur fermé sur E à valeurs dans F et B une application linéaire continue de E dans F. Montrer que $(A + B, D(A))$ est un opérateur fermé. Donner un exemple de deux opérateurs fermés, ayant le même domaine, tels que leur somme ne soit pas un opérateur fermé.

Exercice 43. Soient $N \geq 2$ et Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$. On considère une fonction $\zeta \in C^\infty([0,\infty[)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et :

$$\zeta(t) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \qquad \zeta(t) = 0 \quad \text{si } t \geq \frac{3}{4},$$

on pose ensuite $\varphi(x) := x_1 x_2 \zeta(|x|)$ et, pour $k \geq 1$, $\varphi_k(x) := \varphi(2^k x)$, puis on considère les fonctions :

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-\Delta\varphi)(2^k x), \qquad u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-2k}}{k}\,\varphi_k(x).$$

1) Montrer que $f \in C(\overline{\Omega})$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, alors qu'en dehors de l'origine u est de classe C^∞ et nulle sur $\partial\Omega$.

2) Montrer que si $|x_n| = 2^{-n}$, alors $\partial_{12}u(x_n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Vérifier que $\partial_{ii}u \in C(\overline{\Omega})$ pour $1 \leq i \leq N$ et que $-\Delta u = f$ dans Ω.

3) Soient $E := C(\overline{\Omega})$, $D(A) := \left\{u \in C^2(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$ et $Au := -\Delta u$. Déduire de ce qui précède que A n'est pas un opérateur fermé sur E. Montrer cependant que A est fermable.

Exercice 44. Soient $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. On s'intéresse ici à la résolution (dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) de l'équation :

(1) $$-\Delta u + u = f \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N).$$

1) On suppose que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que (1) admet une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que $\|u\|_p \leq \|f\|_p$ (multiplier l'équation par $|u|^{p-2}u\zeta$ si $p \geq 2$ et par $(u^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}u\zeta$ si $p < 2$, où ζ est une fonction de troncture que l'on fera tendre vers 1, alors que $\varepsilon \to 0$). En déduire que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ l'équation (1) admet une solution unique dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

2) De même lorsque $p \geq 2$, en remarquant que $v := \partial_i u$ vérifie $-\Delta v + v = \partial_i f$, multiplier cette dernière équation par $|v|^{p-2}v$ et effectuer une intégration par parties sur

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x) |\partial_i v(x)|^{p-2} \partial_i v(x) dx$$

pour montrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \partial_i u(x)|^2 |\partial_i u(x)|^{p-2} dx + \|\partial_i u\|_p^p \leq (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, |\partial_i u(x)|^{p-2} |\partial_{ii} u(x)| dx.$$

3) En déduire que si $p \geq 2$, pour une constante indépendante de p on a

$$\|\partial_i u\|_p \leq C \|f\|_p.$$

4) Montrer que si $2 \leq p < \infty$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ l'équation (1) admet une solution unique dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et que

$$\|u\|_p + \|\nabla u\|_p \leq C(N) \|f\|_p.$$

5) Montrer que si $2 \leq p < \infty$ pour tous $\lambda > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, l'équation

$$\text{trouver } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \qquad -\Delta u + \lambda u = f,$$

admet une solution unique. (En fait en utilisant le théorème 11.1 on sait que le résultat est vrai pour $1 < p < \infty$ et que la solution appartient à $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$).

Exercice 45. Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$. On pose $Au := -\Delta u$ pour $u \in D(A)$ où

$$D(A) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \cap W_0^{1,p'}(\Omega) \,;\, \Delta u \in L^{p'}(\Omega) \right\}.$$

Déterminer p pour que $(A, D(A))$ soit un opérateur fermé de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Déterminer également $(A^*, D(A^*))$.

Exercice 46. Soient $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive et $(a_{ij}(\cdot))_{ij}$ une matrice uniformément coercive sur $\mathbb{R}^N$ à coefficients dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ vérifie

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) + cu \leq 0 \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N),$$

alors on a $u \leq 0$ presque partout.

Exercice 47. Soit $a(x) := 2$ pour $-1 \leq x < 0$ et $a(x) := 1$ pour $0 \leq x \leq 1$. Sur $L^2(-1,+1)$ on considère l'opérateur $Au := -(a(x)u')'$ avec le domaine

$$D(A) := \left\{u \in H_0^1(-1,+1)\ ;\ Au \in L^2(-1,+1)\right\}.$$

Vérifier que les fonctions $C_c^\infty(-1,+1)$ ne sont pas toutes contenues dans $D(A)$. Si $u \in D(A)$ et $Au = f \in H^k(-1,+1)$, que peut-on dire de la régularité de u ?

Exercice 48. Soient E un espace de Banach complexe et $A \in \mathscr{L}(E)$. En utilisant la relation $R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)$, satisfaite pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, montrer que si $(\lambda_n)_n$ est une suite de $\rho(A)$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n)\| = +\infty.$$

Exercice 49. Soient E un espace de Banach et $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur E. Montrer que si pour un $\lambda_0 \in \rho(A)$ la résolvante $R(\lambda_0)$ est compacte, alors $R(\lambda)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Exercice 50. Soit $a_n \geq 0$ une suite de nombres telle que la série

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

soit de rayon de convergence 1. Montrer que $z_0 := 1$ est un point singulier de f, et donner un exemple où néanmoins $f(1)$ est fini. En déduire le lemme 12.3.

Exercice 51. Soient $f \in L^2(0,1)$ et $k \in \mathbb{R}$. On considère l'équation :

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans } L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(1) - u'(0) = k. \end{cases}$$

1) Soit $V := \left\{ v \in H^1(0,1)\ ; v(0) = v(1) \right\}$. Montrer que V est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$. Montrer que si $u \in L^2(0,1)$ est solution de (1), alors $u \in V$ et pour tout $v \in V$ on a :

$$(2) \qquad \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + kv(0).$$

2) Pour $f \in L^2(0,1)$ et $k \in \mathbb{R}$, montrer que le problème (2) admet une solution unique. Vérifier que la solution de (2) appartient en fait à $H^2(0,1)$ et vérifie l'équation (1).

Exercice 52. Soient Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $k \in \mathbb{R}$. On considère l'équation :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ u = \text{constante sur } \partial\Omega, \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma) d\sigma = k. \end{cases}$$

On remarquera que la valeur de u sur le bord $\partial\Omega$ fait partie des inconnues du problème. Comme toujours, $\partial/\partial\mathbf{n}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

1) Soit $V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \, ; \, v \text{ est constante sur } \partial\Omega \right\}$. Montrer que V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Si $v \in V$ on notera $m(v)$ la valeur de v sur $\partial\Omega$. Montrer que si $u \in L^2(\Omega)$ est solution de (1), alors $u \in V$ et pour tout $v \in V$ on a :

$$(2) \qquad \int_\Omega (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)) \, dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx + km(v).$$

2) Pour $f \in L^2(\Omega)$ et $k \in \mathbb{R}$, montrer que le problème (2) admet une solution unique. Vérifier que la solution de (2) appartient en fait à $H^2(\Omega)$ et vérifie l'équation (1).

Exercice 53. Soient $N \geq 1$ un entier et $F \subset \mathbb{R}^N$ un compact. On définit la **capacité** de F dans $\mathbb{R}^N$ par :

$$\text{Cap } F := \inf \left\{ \|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \, ; \, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), , \, \varphi = 1 \text{ au voisinage de } F \right\}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné connexe, de classe C^1 et $F \subset \partial\Omega$, on désigne par $H_F(\Omega)$ la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ qui s'annulent sur un voisinage de F.

1) Soient $N \geq 2$, Ω le cube unité $0 < x_i < 1$ pour $1 \leq i \leq N$, et F la partie du bord définie par $x_{_N} = 0$. Montrer l'inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H_F(\Omega), \qquad \int_\Omega |v|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

2) Soit Ω comme dans **1)**. Montrer que l'inégalité correspondante est fausse si F est réduit à un seul point, par exemple $F = \{0\}$. Montrer aussi (ce qui est un peu plus délicat) que l'inégalité est fausse si $N \geq 3$ et si F est la partie du bord définie par $x_{_{N-1}} = x_{_N} = 0$.

3) Soient Ω un ouvert borné, connexe, de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ et $F \subset \partial\Omega$ un fermé. Montrer que si Cap $F = 0$, alors $H_F(\Omega) = H^1(\Omega)$ (remarquer que si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, et si $\varphi_n \in C^1(\overline{\Omega})$ est telle que $\|\varphi_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to \text{Cap } F$, alors $(1 - \varphi_n)u$ tend vers u dans $H^1(\Omega)$). Conclure que dans ce cas il n'y a pas d'inégalité de Poincaré $\int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ valide pour tout $v \in H_F(\Omega)$.

4) Soient F un compact de $\mathbb{R}^N$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $g = 1$ sur un voisinage de F. On pose

$$\mathbf{K} := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \, ; \, v - g \in H_0^1(\mathbb{R}^N \setminus F) \right\}.$$

Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbf{K}$ telle que

$$\text{Cap } F = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \varphi(x)|^2 + \varphi(x)^2 \right] dx.$$

5) Montrer qu'il existe une mesure positive μ portée par F, telle que la fonction φ trouvée en **4)**, vérifie $-\Delta\varphi + \varphi = \mu$ au sens des distributions.

6) Montrer que la masse totale de μ est $\mu(F) = \text{Cap } F$ (noter que $\mu(F) = \int_F d\mu = \int_F \psi d\mu$ pour tout ψ tel que $\psi = 1$ sur F).

Exercice 54. Un point générique de $\mathbb{R}^2$ étant noté (x_1, x_2), on considère l'ouvert $\Omega := B(0,4) \backslash \{(0, x_2) \ ; \ x_2 \geq -2\}$. En partant d'une fonction φ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, montrer qu'une fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ peut vérifier $u = 0$ p.p. sur Ω^c, mais néanmoins $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 55. On suppose que $u \in C^2(]0,\pi[) \cap L^\infty(0,\pi)$ est non identiquement nulle et vérifie l'équation différentielle

$$-u'' - 2\text{cotg}(x)u' = \lambda u. \tag{1}$$

Montrer que nécessairement $\lambda = k^2 - 1$ pour un entier $k \geq 1$ (en posant $v(x) = \varphi(x)u(x)$, trouver une fonction φ telle que v soit solution de $-v'' = (\lambda + 1)v$, avec $v \in H_0^1(0,\pi)$).

Exercice 56. Soient Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ et $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, défini par

$$Au := -\text{div}\,(a(\cdot)\nabla u) + c(\cdot)u,$$

et $D(A) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ cu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \ Au \in L^2(\Omega) \right\}$ où les coefficients a_{ij} sont dans $L^\infty(\Omega)$, $c \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $c^- \in L^\infty(\Omega) + L^q(\Omega)$ avec $q = \varepsilon + N/2$ pour un $\varepsilon > 0$. On suppose de plus que A satisfait le principe du maximum fort, en ce sens que si $Au = f \geq 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$, alors $u > 0$ dans Ω, et on note

$$\lambda_1 := \inf \left\{ (A\varphi|\varphi) \ ; \ \varphi \in D(A), \ \|\varphi\| = 1 \right\}.$$

1) Montrer que λ_1 est atteint.

2) On suppose que $u \in D(A)$ vérifie $Au = \lambda_1 u$ et $u \not\equiv 0$. Montrer que u est de signe constant (si $\varphi := u^+ \not\equiv 0$, montrer que $(A\varphi|\varphi) = \lambda_1 \|\varphi\|^2$, et en déduire que $A\varphi = \lambda_1 \varphi$).

3) En déduire que λ_1 est valeur propre simple de A.

4) Soit $\rho \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que $\rho > 0$ p.p. et

$$\lambda_1(\rho) := \left\{ (A\varphi|\varphi) \ ; \ \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega |\varphi(x)|^2 \rho(x) dx \right\}.$$

Montrer que $\lambda_1(\rho)$ est atteint, et que c'est une *valeur propre* simple du problème $A\varphi_1 = \lambda_1(\rho)\rho\varphi_1$.

5) Montrer que si $0 < \rho_1 \leq \rho_2$ alors $\lambda_1(\rho_2) \leq \lambda_1(\rho_1)$. Montrer aussi que si $\rho_2 \not\equiv \rho_1$, on a $\lambda_1(\rho_2) < \lambda_1(\rho_1)$.

Exercice 57. Soient Ω un ouvert borné et connexe de classe C^1 et $a(\cdot)$ une matrice symétrique à coefficients dans $W^{1,\infty}(\Omega)$.

1) Montrer que

$$\lambda_2 := \inf \left\{ \int_\Omega a(x)\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx \ ; \ \|\varphi\|^2 = 1, \ \int_\Omega \varphi(x)dx = 0 \right\},$$

est atteint.

2) En déduire que $\lambda_1 := 0$ est valeur propre simple du problème

$$-\mathrm{div}\,(a(\cdot)\nabla\varphi) = \lambda\varphi, \qquad (a(\sigma)\nabla u(\sigma)) \cdot \mathbf{n}(\sigma) = 0 \quad \text{sur} \ \ \partial\Omega.$$

Exercice 58. Soient Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, a_{ij}, b_i, c, ρ des fonctions à valeurs réelles de $C(\overline{\Omega})$ où la matrice $(a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique et uniformément coercive sur $\overline{\Omega}$, et $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. On considère les opérateurs L_0 et L définis par

$$L_0 u := -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{ij}u + b \cdot \nabla u, \qquad Lu := L_0 u + cu.$$

On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est telle que pour une fonction non nulle $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (à valeurs complexes) on a

$$L\varphi = \lambda\rho\varphi \ \text{ dans } \ \Omega, \qquad \varphi = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \tag{1}$$

1) Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction telle que $v(x) > 0$ dans $\overline{\Omega}$; on pose pour $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$\widetilde{L}u := -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{ij}u + b \cdot \nabla u - \frac{2}{v}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_j v \partial_i u.$$

Montrer que si $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\widetilde{L}u \leq 0$ dans Ω, alors $u \equiv 0$.

2) Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $v(x) > 0$ dans $\overline{\Omega}$. Montrer que si $u := |\varphi/v|^2$, alors on a

$$\widetilde{L}u \leq 2\,\frac{\mathfrak{Re}(\lambda)\,\rho v - Lv}{v}\,u \quad \text{dans} \ \ \Omega.$$

(En posant $z := \varphi/v$, calculer $\widetilde{L}z$ et $\widetilde{L}\overline{z}$ en fonction de φ, v et $L_0\varphi, L_0 v$, puis vérifier que $\widetilde{L}u \leq \mathfrak{Re}(\overline{z}\widetilde{L}z) + \mathfrak{Re}(z\widetilde{L}\overline{z})$).

3) On suppose que $\beta \in \mathbb{R}$ est tel que pour une fonction $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $v(x) > 0$ dans $\overline{\Omega}$ on a $Lv \geq \beta\rho v$ dans Ω. Montrer que $\beta \leq \mathfrak{Re}(\lambda)$.

4) En déduire que si λ est valeur propre de L pour le problème (1), alors pour toute fonction $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $v(x) > 0$ sur $\overline{\Omega}$, on a :

$$\mathfrak{Re}(\lambda) \geq \inf_{x\in\Omega} \frac{Lv(x)}{\rho(x)v(x)} \,.$$

On a ainsi une caractérisation de la première valeur propre du problème de Dirichlet $L\varphi = \lambda\rho\varphi$ avec $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, à savoir :

$$\lambda_1 = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \exists v \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),\ v > 0 \ \text{ dans } \ \Omega,\ Lv \geq \lambda\rho v\right\}.$$

Exercice 59. Soient X un espace vectoriel et f, g deux formes linéaires sur X. On suppose que pour tout $\xi \in X$ tel que $\langle f, \xi\rangle > 0$, on a $\langle g, \xi\rangle \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $g = \lambda f$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u \not\equiv 0$ et v deux éléments de $L^1_{\rm loc}(\Omega)$. On suppose que :

$$\forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx > 0 \quad\Longrightarrow\quad \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \geq 0.$$

En déduire qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $v = \lambda u$.

Exercice 60. Soient X un espace vectoriel et $f_0, f_1, \ldots, f_m$ des formes linéaires sur X. On suppose que

$$\cap_{1\leq j\leq m}\ker(f_j) \subset \ker(f_0)\,.$$

1) Pour $x \in X$, on pose $\Phi(x) := (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Montrer que $\Phi(X)$ est fermé dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et que $e_0 := (1, 0, \ldots, 0) \notin \Phi(X)$.

2) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\eta := (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que pour tout $\xi \in \Phi(X)$ on ait (ici $\eta\cdot\xi$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^{m+1}$) :

$$\eta\cdot e_0 < a < \eta\cdot\xi\,.$$

3) Montrer qu'en réalité $a = 0$, en déduire que $\eta_0 < 0$, et que pour tout $x \in X$ on a

$$\eta_0 f_0(x) + \sum_{j=1}^m \eta_j f_j(x) = 0\,.$$

4) Conclure qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $f_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j$.

5) Prouver le lemme 14.6.

Exercice 61. Soient X un espace de Banach, K un convexe ouvert de X et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i. On se propose de montrer que f est continue et même localement lipschitzienne.

1) Donner un exemple de fonction convexe non continue (dans un espace de dimension infinie).

2) On suppose que $0 \in K$, que $f(0) = 0$ et qu'il existe $R_0 > 0$ et $M > 0$ telles que pour tout $x \in B(0, R_0)$ on ait $f(x) \leq M$. Montrer que si $0 < \varepsilon \leq R_0$, alors pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$, on a $|f(x)| \leq \varepsilon M R_0^{-1}$. En déduire que pour tout $x \in B(0, R_0)$ on a $|f(x)| \leq M R_0^{-1}\|x\|$.

3) On suppose que pour tout $x_0 \in K$ il existe $M > 0$ et $R_0 > 0$ telles que si $x \in B(x_0, R_0)$, on ait $f(x) \leq M$. Montrer que

$$\forall x \in B(x_0, R_0), \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq M R_0^{-1} \|x - x_0\|.$$

4) Soient $x_0 \in K$ et $R > 0$ fixés. Montrer qu'il existe $x_1 \in B(x_0, R)$, $R_1 > 0$ et n_1 entier tels que pour $x \in B(x_1, R_1)$ on ait $f(x) \leq n_1$ (on pourra considérer pour $n \geq 1$ entier, les ensembles

$$F_n := \left\{ x \in \overline{B(x_0, R)} \; ; \; f(x) \leq n \right\},$$

et utiliser le théorème de Baire).

5) Montrer que f est localement lipschitzienne sur K.

Exercice 62. Soient $1 \leq p < \infty$ et pour $x \in \ell^p := \ell^p(\mathbb{N}^*)$ la fonction

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{np}.$$

Montrer que f est une fonction convexe continue sur ℓ^p, mais n'est pas bornée sur les bornés.

Exercice 63. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Caratheodory, telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad |f(x, s)| \leq a(x) + b|s|,$$

où $a \in L^2(\Omega)$, et $b \geq 0$ est une constante. On suppose que l'opérateur $Bu := f(\cdot, u(\cdot))$ est de classe C^1 de $L^2(\Omega)$ dans lui-même. En utilisant l'*Exercice 36*, montrer qu'il existe deux fonctions $a_0 \in L^2(\Omega)$ et $b_0 \in L^\infty(\Omega)$ telle que $f(x, s) \equiv a_0(x) + b_0(x)s$.

Exercice 64. Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction de période 1, i.e. $f(x + 1) = f(x)$ p.p. sur $\mathbb{R}$. On définit la moyenne de f par

$$M(f) := \int_0^1 f(x) dx.$$

1) Pour $n \geq 1$ et $x \in]0, 1[$, on pose $u_n(x) := f(nx)$. Montrer que si $p > 1$, alors $u_n \rightharpoonup M(f)$ dans $L^p(0, 1)$-faible.

2) On suppose que $p = 1$, et on considère de nouveau la suite $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, en approchant f par une fonction périodique $g_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $M(|f - g_\varepsilon|) < \varepsilon$, et en considérant $v_n(x) := g_\varepsilon(nx)$, montrer que $u_n \rightharpoonup M(f)$ dans $L^1(0, 1)$-faible.

3) Etudier les questions précédentes dans le cas particulier de la fonction f donnée sur $]0, 1[$ par

$$f := \alpha 1_{]0,1/2[} + \beta 1_{[1/2,1[},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont fixés.

4) Soient $1 \leq p, q < \infty$ et $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $u \in L^p(0,1)$ on ait $g(u) \in L^q(0,1)$. On pose $Bu := g(u(\cdot))$, et on suppose que l'opérateur B est séquentiellement continu de $L^p(0,1)$-faible dans $L^q(0,1)$-faible, i.e. si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(0,1)$-faible, alors $Bu_n \rightharpoonup Bu$ dans $L^q(0,1)$-faible. Montrer, en utilisant la question **3)**, que la fonction g est affine.

Exercice 65. Soient $k \geq 0$ un entier, $p \geq 1$ et Ω un ouvert de mesure finie. Pour $u \in L^p(\Omega)$ on pose $V(u) := \int_\Omega (1 - \cos(u(x)))dx$. Déterminer tous les p pour lesquels V est de classe C^k sur $L^p(\Omega)$.

Exercice 66. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\mathfrak{S}_N$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre N. On rappelle que si $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathfrak{S}_N$, on écrit $\sigma^1 \geq \sigma^2$ lorsque la matrice $\sigma^1 - \sigma^2$ est semi-définie positive. On dit qu'une fonction

$$H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{S}_N \longrightarrow \mathbb{R},$$

est un *hamiltonien elliptique* du second ordre si H n'est pas constant en $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ et si pour tout $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathfrak{S}_N$ avec $\sigma^1 \geq \sigma^2$, on a

$$H(x, u, \xi, \sigma^1) \leq H(x, u, \xi, \sigma^2).$$

Si H est un hamiltonien elliptique on dit que l'équation

$$H(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) = f(x)$$

est une équation elliptique (non-linéaire en général).

1) Soient $A, B \in \mathfrak{S}_N$, avec A définie positive et B semi-définie positive. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$.

2) Soit $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice symétrique définie positive sur $\overline{\Omega}$. On suppose que b_i (pour $1 \leq i \leq N$) et c ainsi que les coefficients a_{ij} sont des éléments de $C(\overline{\Omega})$ et on pose

$$H(x, u, \xi, \sigma) := -\mathrm{tr}(a(x)\sigma) + b(x) \cdot \xi + c(x)u.$$

Déduire de la question précédente que H est un hamiltonien elliptique du second ordre.

3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Trouver un hamiltonien $H(\xi, \sigma)$ tel que l'équation

$$(1) \qquad \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{-1/2} \left[-\Delta u + \frac{\partial_i u \partial_j u}{1 + |\nabla u|^2} \partial_{ij} u\right] = N f(x),$$

s'écrive comme $H(\nabla u, D^2 u) = f$ (si u est solution de l'équation (1), la surface représentée par $(x, u(x))$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$, lorsque x parcourt Ω, a une courbure moyenne qui est en chaque point égale à $-f(x)$).

4) En reprenant les notations ci-dessus, trouver une fonctionnelle E, et un espace de Banach X tels que tout point critique u de E sur X vérifie $H(\nabla u, D^2 u) = f$ (on pourra noter que si

$$J(u) := \int_\Omega \left[\left(1 + |\nabla u(x)|^2\right)^{1/2} - 1 \right] dx,$$

alors $\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \left(1 + |\nabla u(x)|^2\right)^{-1/2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx)$.

5) Interpréter l'équation (1) et sa solution éventuelle, dans le cas particulier où $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$.

2 Le degré topologique

Soient $N \geq 1$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue et $b \in \mathbb{R}^N$ un point fixé. L'idée du degré topologique est d'associer à la fonction f, à l'ouvert Ω et au point *cible* $b \in \mathbb{R}^N$ un entier dépendant continûment de f et, dans une certaine mesure, de b tel que si cet entier est non nul, alors l'équation :

$$x \in \Omega, \qquad f(x) = b,$$

admet une solution. Par exemple si $N := 1$, $\Omega :=]-1, +1[$ et $f \in C([-1, +1], \mathbb{R})$, pour tout point $b \neq f(\pm 1)$ on peut considérer le nombre

$$\deg(f, \Omega, b) := \frac{1}{2}\big[\operatorname{sgn}(f(1) - b) - \operatorname{sgn}(f(-1) - b))\big],$$

qui est évidemment un entier. On voit que si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, on a

$$(f(1) - b)(f(-1) - b)) < 0,$$

et par conséquent il existe $x \in]-1, +1[$ tel que $f(x) = b$. On imagine aussi que la situation pour $N \geq 2$ est plus complexe.

En réalité, le lecteur intéressé par les méthodes variationnelles, peut se borner à étudier la notion de *genre* que nous introduisons au paragraphe § 4. Cependant, en utilisant les techniques variationnelles en même temps que le degré topologique on peut établir des résultats plus fins en ce qui concerne l'existence de solutions pour certaines équations. Par ailleurs, comme nous le verrons par la suite, la connaissance du degré topologique de Leray-Schauder permet également de résoudre des équations aux dérivées partielles qui n'ont pas de formulation variationnelle.

1. Degré topologique de Brouwer

Nous donnons ici la version de E. Heinz [79] de la définition du degré topologique de Brouwer. La norme de $\mathbb{R}^N$ sera notée $|\cdot|$; bien que de façon générale on n'ait pas besoin de préciser de quelle norme il s'agit, pour fixer les idées on pourra considérer que $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on désigne par $\partial\Omega$ sa frontière. Pour une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ on désigne par $J_f(x)$ le jacobien de f au point x, i.e.

$$J_f(x) := \det f'(x) = \det\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x)\right)_{1\le i,j\le N}.$$

1.1 Définition. *Soient $N \ge 1$ un entier, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(\partial\Omega)$. On considère $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0,\infty[,\mathbb{R})$ à support compact contenu dans $]0,\varepsilon[$, et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1.$$

On appelle le **degré topologique de Brouwer** *de f dans Ω par rapport au* **point cible** *b le nombre*

$$\deg(f,\Omega,b) := \int_\Omega \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx.$$

Nous allons montrer que le nombre $\deg(f,\Omega,b)$ est indépendant de ε et de φ et que c'est un entier. Pour ce faire nous avons besoin de quelques lemmes techniques.

1.2 Lemme. *Soit g une fonction de classe C^2 de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1}$. On pose :*

$$B_i := \det(\partial_1 g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_N g).$$

Alors on a

$$\sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = 0. \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour $1 \le i \le N$ posons $C_{ii} := 0$ et pour $j < i$:

$$C_{ij} := \det(\partial_1 g,\dots,\partial_{j-1}g,\partial_{ij}g,\partial_{j+1}g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_N g),$$

et si $j > i$

$$C_{ij} := \det(\partial_1 g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_{j-1}g,\partial_{ij}g,\partial_{j+1}g,\dots,\partial_N g).$$

On peut alors voir que $\partial_i B_i = \sum_{j=1}^N C_{ij}$, et que par conséquent, si α désigne le membre de gauche de (1.1), on a :

$$\alpha := \sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = \sum_{i,j} (-1)^i C_{ij}.$$

Mais on peut remarquer qu'avec les notations ci-dessus on a $C_{ij} = (-1)^{j+i-1} C_{ji}$. En effet, en supposant par exemple $j < i$, on a :

$$\begin{aligned}
&C_{ij} = \\
&(-1)^{j-1}\det(\partial_{ij}g,\partial_1 g,\dots,\partial_{j-1}g,\partial_{j+1}g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_N g),\\
&C_{ji} = \det(\partial_1 g,\dots,\partial_{j-1}g,\partial_{j+1}g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{ij}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_N g)\\
&\quad = (-1)^i \det(\partial_{ij}g,\partial_1 g,\dots,\partial_{j-1}g,\partial_{j+1}g,\dots,\partial_{i-1}g,\partial_{i+1}g,\dots,\partial_N g).
\end{aligned}$$

Cela implique finalement que :

$$\alpha = \sum_{i,j}(-1)^{j-1}C_{ji} = -\sum_{i,j}(-1)^{j}C_{ij} = -\alpha,$$

et le lemme est prouvé. □

1.3 Lemme. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^2. On désigne par $A_{ij}(x)$ le cofacteur de $\partial_i f^j(x)$ dans $J_f(x)$. Alors pour tout $j \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{N}$ fixé on a :*

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij} = 0.$$

Démonstration. Rappelons que le cofacteur A_{ij} est donné par

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left(\partial_\ell f^k\right)_{\substack{k\neq j \\ \ell\neq i}}.$$

Pour j fixé, en appliquant le lemme 1.2 à la fonction

$$g = (f^1, \ldots, f^{j-1}, f^{j+1}, \ldots, f^N),$$

on obtient le résultat annoncé. □

1.4 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $0 \notin f(\partial\Omega)$ et que $\mathrm{supp}\psi \subset]0,\varepsilon[$ pour un $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))$, et*

$$\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0.$$

Alors on a

$$\int_\Omega \psi(|f(x)|)J_f(x)dx = 0.$$

Démonstration. L'idée de la preuve est d'écrire la fonction $x \mapsto \psi(|f(x)|)J_f(x)$ comme la divergence d'une fonction nulle au voisinage du bord $\partial\Omega$ et de faire ensuite une intégration par parties. Supposons pour un instant que $f \in C^2$. Soit $\gamma(0) := 0$ et pour $r > 0$:

$$\gamma(r) := r^{-N}\int_0^r t^{N-1}\psi(t)dt.$$

Comme ψ est continue et que son support est loin de l'origine, on voit facilement que $\gamma \in C^1_c(]0,\infty[,\mathbb{R})$ et que :

$$r\gamma' + N\gamma = \psi.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^N$ posons $F(y) := \gamma(|y|)y$, de telle sorte que

$$\mathrm{div}F(y) = \nabla\cdot F(y) = |y|\gamma'(|y|) + N\gamma(|y|) = \psi(|y|). \tag{1.2}$$

Si $x \in \Omega$ on a, en utilisant le lemme 1.3 et ses notations :

$$\begin{aligned}
&\sum_i \partial_i \sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)) = \\
&\quad = \sum_i \sum_j \left(\partial_i A_{ij}(x)\right) F^j(f(x)) + \sum_i \sum_j A_{ij}(x) \partial_i \left(F^j(f(x))\right) \\
&\quad = \sum_i \sum_j A_{ij}(x) \sum_k \partial_i f^k(x) \, \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)) \\
&\quad = \sum_j \sum_k \left(\sum_i A_{ij}(x) \partial_i f^k(x) \right) \, \frac{\partial F^j}{\partial y_k}(f(x)).
\end{aligned}$$

Or d'après la règle de Cramer on sait que : $\sum_{i=1}^N A_{ij}(x)\partial_i f^k(x) = \delta_{kj} J_f(x)$, ce qui donne :

$$\sum_i \partial_i \sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)) = J_f(x) \; (\nabla \cdot F)\,(f(x)).$$

On peut donc écrire, en utilisant la relation ci-dessus et (1.2) :

$$\begin{aligned}
\psi(|f(x)|) J_f(x) &= J_f(x) [r\gamma'(r) + N\gamma(r)]\Big|_{r=|f(x)|} \\
&= J_f(x) \; \nabla \cdot F\Big|_{y=f(x)} \\
&= \sum_{i=1}^N \partial_i \sum_{j=1}^N A_{ij}(x) F^j(f(x)).
\end{aligned}$$

On déduit finalement de cette dernière égalité que

$$\int_\Omega \psi(|f(x)|) J_f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i \Big(\sum_j A_{ij}(x) F^j(f(x)) \Big) dx.$$

Mais puisque $F^j(f(x)) = 0$ dans un voisinage de la frontière $\partial\Omega$, une intégration par parties montre que la dernière intégrale est nulle et le lemme est prouvé, pour une fonction f de classe C^2. Le cas général se déduit par régularisation de f. □

On va voir maintenant que la définition du degré est indépendante de ε et φ.

1.5 Proposition. *Avec les hypothèses et notations de la définition 1.1, le degré topologique* $\deg(f, \Omega, b)$ *est indépendant de* ε *et de la fonction* φ*, pourvu que* $\varepsilon < \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega))$.

Démonstration. Soient $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega))$ et $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$. Si φ_1 et φ_2 ont leur support contenu dans respectivement dans $]0, \varepsilon_1[$ et $]0, \varepsilon_2$ et sont telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|) dx = 1,$$

alors en posant $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$, on a $\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0$, et en appliquant le lemme 1.4 à ψ et $x \mapsto f(x) - b$ on obtient

$$\int_\Omega \psi(|f(x) - b|)J_f(x)dx = 0. \qquad \square$$

Avant de voir que le degré topologique est un entier, nous allons montrer sa *stabilité* par rapport à f.

1.6 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné, $f_1, f_2 \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et b un point de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que*

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)), \quad \textit{et} \quad \|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,$$

on a $\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b)$.

Démonstration. Comme $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f - b, \Omega, 0)$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $b = 0$. Soit $\theta : [0, \infty[\to [0, 1]$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & 0 \le r \le \varepsilon, \\ 0 & r \ge 2\varepsilon. \end{cases}$$

En introduisant la fonction :

$$f_3(x) := (1 - \theta(|f_1(x)|))f_1(x) + \theta(|f_1(x)|)f_2(x),$$

on vérifie que pour $1 \le i, k \le 3$ on a $\|f_i - f_k\|_\infty < \varepsilon$ et pour $x \in \partial\Omega$, on a $|f_i(x)| > 3\varepsilon$. D'autre part le choix de θ implique :

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad |f_1(x)| > 2\varepsilon, \\ f_2(x) & \text{si} \quad |f_1(x)| < \varepsilon. \end{cases}$$

On va maintenant choisir les fonctions φ_1 et φ_2 pour définir le degré des fonctions f_1, f_2 de la façon suivante :

$$\operatorname{supp}(\varphi_1) \subset]2\varepsilon, 3\varepsilon[, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = 1,$$
$$\operatorname{supp}(\varphi_2) \subset]0, \varepsilon[, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1.$$

Comme f_3 coïncide (en partie) avec f_1 ou avec f_2, on a alors :

$$\varphi_1(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) = \varphi_1(|f_1(x)|)J_{f_1}(x)\,,$$
$$\varphi_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) = \varphi_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x).$$

Cela implique de façon évidente

$$\deg(f_3, \Omega, 0) = \deg(f_1, \Omega, 0), \quad \text{et} \quad \deg(f_3, \Omega, 0) = \deg(f_2, \Omega, 0). \qquad \square$$

Le résultat que l'on vient de voir montre que le degré topologique est *robuste* et permet en particulier d'étendre la définition du degré topologique aux fonctions qui sont seulement continues.

1.7 Théorème & Définition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On considère un point $b \notin f(\partial\Omega)$ et $(f_k)_k$ une suite de fonctions de $C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0 \qquad \textit{sur} \quad \overline{\Omega},$$

alors le degré topologique de f_k existe pour k assez grand et le degré topologique de f est défini par :

$$\deg(f, \Omega, b) := \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, b). \tag{1.3}$$

Démonstration. En effet comme $\|f - f_k\|_\infty \to 0$ sur $\overline{\Omega}$, pour $k \geq k_0$ assez grand, b n'appartient pas à $f_k(\partial\Omega)$ et par conséquent le degré topologique $\deg(f_k, \Omega, b)$ est bien défini. Par ailleurs la proposition 1.6 implique que si k, j sont assez grands pour que

$$\|f_k - f_j\|_\infty < \frac{1}{4}\text{dist}\left(b, f_k(\partial\Omega) \cup f_j(\partial\Omega)\right),$$

alors $\deg(f_k, \Omega, b) = \deg(f_j, \Omega, b)$. On conclut que la suite des degrés topologiques $(\deg(f_k, \Omega, b))_k$ est stationnaire et la définition (1.3) a un sens. Ensuite on vérifie facilement que cette définition est indépendante de la suite $(f_k)_k$. □

Le degré topologique étant défini pour des fonctions continues, nous allons en étudier quelques propriétés utiles pour la suite, et au cours de cette étude nous verrons que le degré est un entier (élément de $\mathbb{Z}$).

2. Propriétés du degré

Nous regroupons ici les propriétés les plus importantes du degré topologique de Brouwer. Lorsque cela n'est pas précisé, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue.

La première propriété importante du degré est sa stabilité, propriété qui nous a permis d'étendre la définition 1.1 aux fonctions continues ; la démonstration de la proposition suivante est évidente.

2.1 Proposition (Stabilité). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sont deux fonctions continues telles que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4}\,\text{dist}(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)),$$

on a $\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b)$.

Un autre type de stabilité concerne les perturbations par rapport à la *cible* b.

2.2 Proposition (Stabilité par rapport à la cible). *Soient Ω un ouvert borné et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que $b, b' \in \mathbb{R}^N$ sont dans la même composante connexe de $f(\partial\Omega)^c$ alors*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b').$$

Démonstration. Il suffit de voir que si $b_1 \in \mathbb{R}^N$ est assez proche de b, alors le degré est le même. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega))$, et posons

$$f_0(x) := f(x) - b, \qquad f_1(x) := f(x) - b_1.$$

On voit que si $\operatorname{dist}(b_1, b) < \varepsilon$, alors $\|f_0 - f_1\|_\infty < \varepsilon$, et que par conséquent d'après la proposition précédente :

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f_0, \Omega, 0) = \deg(f_1, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, b_1). \qquad \square$$

2.3 Proposition (Additivité). *Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \mathbb{R}^N)$. Si b est un point de $\mathbb{R}^N$ et $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, alors :*

$$\deg(f, \Omega_2 \cup \Omega_2, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b).$$

Démonstration. Si on suppose de plus que la fonction f est de classe C^1, la preuve découle immédiatement de la définition. Pour le cas général, il suffit d'approcher f par des fonctions régulières. $\square$

Comme corollaire de la propostion 2.3 on a la propriété d'*excision* pour le degré topologique.

2.4 Corollaire (Excision). *Soient Ω un ouvert borné, une fonction $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $K \subset \overline{\Omega}$ un compact et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Alors :*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega - K, b).$$

Le résultat suivant est très souvent utilisé pour montrer l'existence de solutions pour des équations non linéaires dans $\mathbb{R}^N$. On l'utilise en même temps que des arguments d'homotopie, comme nous le verrons plus loin.

2.5 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et b un point de $\mathbb{R}^N$ n'appartenant pas à $f(\partial\Omega)$. Si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$, alors le degré topologique $\deg(f, \Omega, b)$ est nul. Comme toujours, il suffit de montrer le résultat pour des fonctions régulières. Soient $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(b, f(\overline{\Omega}))$ et une fonction φ satisfaisant les conditions de la définition 1.1, telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]0, \varepsilon[$. Alors on voit, d'après la définition, que $\deg(f, \Omega, b) = 0$. $\square$

Par exemple en appliquant la définition 1.1 à l'application identité $I(x) := x$, on obtient :

2.6 Corollaire. *Soient Ω un ouvert borné et $b \in \mathbb{R}^N$. En désignant par I l'application identité, on a :*

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & si \quad b \in \Omega, \\ 0 & si \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

On a aussi :

$$\deg(-I, \Omega, b) = \begin{cases} (-1)^N & si \quad b \in \Omega \\ 0 & si \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

En utilisant les propositions 2.2 et 2.5 on déduit le résultat suivant :

2.7 Corollaire. *Si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ et $f(\overline{\Omega}) \subset H$, alors pour tout $b \notin f(\partial\Omega)$ on a* $\deg(f, \Omega, b) = 0$.

En effet si $b \notin H$, alors le degré est nul de manière évidente. Si $b \in H$, il suffit de prendre b' en dehors de H et assez voisin de b pour voir que le $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b') = 0$. □

Soient X, Y deux espaces topologiques et f, g deux applications continues de X dans Y. On dit que f est *homotope* à g *dans* Y s'il existe une fonction continue

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. La fonction H est alors appelée une *homotopie*. On vérifie sans peine que la relation "*f est homotope à g dans Y*" est une relation d'équivalence dans $C(X,Y)$. L'invariance par homotopie du degré topologique est très importante, parce qu'en particulier elle permet de calculer le degré topologique de certaines fonctions en se ramenant à des cas où le calcul est facile.

2.8 Proposition (Invariance par homotopie). *Soient $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue et $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a :*

$$\deg(H(\cdot, t), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega, b).$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$ alors

$$\deg(H(\cdot, t_1), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, t_2), \Omega, b).$$

En effet soit $\varepsilon := \frac{1}{4}\mathrm{dist}(b, H(\partial\Omega \times [0,1]))$; comme $H(\cdot,\cdot)$ est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,1]$, alors il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on ait :

$$|H(x, t_1) - H(x, t_2)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.1, on a

$$\deg(H(\cdot, t_1), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, t_2), \Omega, b)\,,$$

pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $|t_1 - t_2| \leq \delta$. On déduit le résultat d'invariance par homotopie en recouvrant le compact $[0,1]$ par des intervalles de longueur δ. □

Nous avons vu jusque-là que le bord de Ω jouait un rôle particulier. En fait en ce qui concerne le degré topologique on pourrait dire que *tout se passe sur le bord*.

2.9 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et deux fonctions $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que $f = g$ sur $\partial\Omega$ et que $b \notin f(\partial\Omega)$. Alors on a*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'invariance par homotopie du degré topologique, en considérant l'homotopie

$$H(x,t) := tf(x) + (1-t)g(x). \qquad \square$$

Nous allons voir maintenant que le degré topologique est un entier (i.e. élément de $\mathbb{Z}$).

2.10 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On désigne par $S := \{x \in \Omega;\ J_f(x) = 0\}$ l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Alors on a :*

$$\deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(J_f(x)) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Si $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$, on sait que le degré est nul et on n'a rien à montrer. Supposons donc que $f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$. On remarque en premier lieu qu'il existe $m \geq 1$ tel que $f^{-1}(\{b\}) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. En effet $f^{-1}(\{b\})$ est un compact contenu dans $\Omega \setminus S$ et de plus il est discret. Pour voir que $f^{-1}(\{b\})$ est discret, considérons un point $x \in f^{-1}(\{b\})$; on sait, d'après le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un voisinage ouvert V_b de b, et un voisinage ouvert V_x de x tels que $f : V_x \to V_b$ soit un difféomorphisme : cela implique en particulier que $V_x \cap f^{-1}(\{b\}) = \{x\}$.

Soit $r > 0$ assez petit pour que $B(b,r) \cap (f(\partial\Omega) \cup f(S)) = \varnothing$. On sait que pour $1 \leq i \leq m$, il existe un voisinage V_i de x_i tel que f soit un difféomorphisme de V_i sur $B(b,r)$ et que $f^{-1}(B(b,R)) = \cup_{1 \leq i \leq m} V_i$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min(r, \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega) \cup f(S)))$, et prenons une fonction $\varphi \in C(]0,\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]0, \varepsilon[$, et $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, b) &= \int_\Omega \varphi\left(|f(x) - b|\right) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{V_i} \varphi\left(|f(x) - b|\right) J_f(x) dx. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y := f(x) - b$, puisque $J_f(x)$ ne s'annule pas sur V_i, on a

$$dy = |J_f(x)|dx = \operatorname{sgn}(J_f(x_i))J_f(x)dx,$$

et on voit que

$$\begin{aligned}\int_{V_i} \varphi\left(|f(x)-b|\right) J_f(x)dx &= \operatorname{sgn}(J_f(x_i)) \int_{B(0,r)} \varphi(|y|)dy \\ &= \operatorname{sgn}(J_f(x_i)).\end{aligned}$$

□

Pour obtenir le même résultat pour le degré topologique des fonctions continues, on doit montrer que les cibles ne sont pas *génériquement* des valeurs singulières et ensuite utiliser la définition du degré pour les fonctions continues. En ce qui concerne la notion intuitive selon laquelle il n'y a pas trop de valeurs singulières, on dispose du théorème de Sard, dont nous donnons ci-dessous la démonstration d'une version limitée (mais suffisante pour nos besoins actuels).

2.11 Lemme de Sard. *Soient Ω ouvert borné et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et*

$$S := \{x \,;\, x \in \Omega, \quad J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f. Alors $f(S)$ est de mesure nulle.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et Ω est un cube de côté a. Pour $k \geq 1$ entier, on divise le cube en k^N cubes C_i de côté $\frac{a}{k}$ (avec $1 \leq i \leq k^N$). Si i est tel que $S \cap C_i \neq \varnothing$, soient $x \in S \cap C_i$ et $y \in C_i$. Comme $J_f(x) = 0$, cela signifie que $f'(x)\left(\mathbb{R}^N\right)$ est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^N$, soit H_x. En désignant par ε le module d'uniforme continuité de f' sur $\overline{\Omega}$, on a :

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x) - f'(x)\cdot(y-x)| &\leq |y-x|\,\varepsilon(|y-x|) \\ &\leq \frac{a\sqrt{N}}{k}\,\varepsilon(|y-x|)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que : $\operatorname{dist}(f(y), f(x)+H_x) \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}\,\varepsilon\left(\frac{a\sqrt{N}}{k}\right)$. Par ailleurs, en posant $L := \max_{x\in\overline{\Omega}} \|f'(x)\|$, le théorème des accroissements finis permet d'écrire, :

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\leq |y-x| \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(x+t(y-x)| \\ &\leq L\cdot\frac{a\sqrt{N}}{k},\end{aligned}$$

ce qui implique finalement que si $C_i \cap S \neq \varnothing$, alors $f(C_i)$ est contenu dans un pavé *d'épaisseur* $2\varepsilon(a\sqrt{N}/k)a\sqrt{N}/k$ et dont la base a des côtés de longueur $2La\sqrt{N}/k$. On en déduit l'estimation :

$$\operatorname{mes}\,(f(C_i)) \leq 2\,\varepsilon\left(a\sqrt{N}/k\right)\cdot\frac{a\sqrt{N}}{k}\cdot\left(2L\frac{a\sqrt{N}}{k}\right)^{N-1}$$

et, puisqu'il y a k^N cubes C_i, on en déduit que pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\operatorname{mes}\,(f(S)) \leq 2^N\cdot L^{N-1}\cdot(a\sqrt{N})^N\,\varepsilon\left(a\sqrt{N}/k\right).$$

En faisant tendre $k \to +\infty$, on voit que $\operatorname{mes}\,(f(S)) = 0$. □

2.12 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$ alors le degré* $\deg(f, \Omega, b)$ *est un entier (élément de $\mathbb{Z}$).*

Démonstration. On peut prendre une fonction $f_1 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f_1, \Omega, b).$$

Désignons par S l'ensemble des points singuliers de f_1. Puisque $f_1(\partial\Omega)$ est compact, et que d'après le théorème de Sard $f_1(S)$ est de mesure nulle alors que $\mathbb{R}^N \setminus f_1(\partial\Omega)$ est un ouvert, on peut affirmer que $\mathbb{R}^N \setminus (f_1(\partial\Omega) \cup f_1(S))$ est dense dans $\mathbb{R}^N \setminus f_1(\partial\Omega)$, et par conséquent on peut choisir un point $b_1 \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_1(S)$, tel que b et b_1 soient dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus f_1(\partial\Omega)$. De cette façon, puisque le degré topologique est constant sur les composantes connexes de $f_1(\partial\Omega)^c$ (voir proposition 2.2) on voit que

$$\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_1, \Omega, b_1) \in \mathbb{Z},$$

et par conséquent le degré topologique de f est un entier. □

3. Quelques applications

Nous présentons ici un certain nombre d'applications du degré topologique. Dans les *Exercices*, le lecteur trouvera d'autres exemples d'utilisation du degré topologique, notamment pour la résolution de certaines équations non-linéaires.

3.1 Proposition (Non rétraction de la boule). *Soient $B := B(0,1)$ la boule unité ouverte et S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Il n'existe pas de fonction continue $\varphi : \overline{B} \to S^{N-1}$ telle que $\varphi\big|_{S^{N-1}} = I$.*

Démonstration. Sinon d'après la proposition 2.9 (affirmant que tout se passe sur le bord) on aurait

$$\deg(\varphi, B, 0) = \deg(I, B, 0) = 1.$$

On en déduit qu'il existe $x \in B$ tel que $\varphi(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\varphi(x)$ appartient à la sphère S^{N-1}. □

Chacun sait que si $f : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$ est une application continue, alors il existe $x \in [-1, +1]$ tel que $f(x) = x$, i.e. f admet un point fixe. La démonstration, qui utilise des arguments de connexité et de continuité, n'est pas adaptable au cas d'applications $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$, si $\overline{B}(0,1)$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ et $N \geq 2$. Ce résultat important est prouvé à l'aide du degré topologique.

3.2 Théorème (théorème de point fixe de Brouwer). *Soit $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans $\overline{B}(0,1)$, i.e. :*

$$\exists x \in \overline{B}(0,1), \qquad f(x) = x.$$

Démonstration. S'il existe $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = x$, le résultat est prouvé. Sinon, pour tout $x \in S^{N-1}$, on a $x - f(x) \neq 0$. Introduisons alors l'homotopie $H(x,t) := x - tf(x)$ et soit $B := B(0,1)$. On va vérifier que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in S^{N-1}$ on a :

$$x - tf(x) \neq 0.$$

En effet on le sait déjà pour $t = 1$. S'il existait $x \in S^{N-1}$ et $0 \leq t < 1$ tels que $x - tf(x) = 0$, on aurait alors $t|f(x)| = 1$, ce qui n'est pas possible car $|f(x)| \leq 1$ et $t < 1$. Par conséquent le degré $\deg(H(\cdot,t), B, 0)$ est défini pour tout $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned} \deg(H(\cdot,1), B, 0) &= \deg(H(\cdot,0), B, 0) \\ &= \deg(I, B, 0) = 1. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.5, on conclut qu'il existe $x \in B$ tel que $x - f(x) = 0$. □

Le lecteur pourra montrer, en exercice, la généralisation suivante du théorème de point fixe de Brouwer.

3.3 Proposition. *Soit K un ouvert convexe borné et non vide de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\overline{K}, \overline{K})$. Alors f admet un point fixe dans $\overline{K}$.*

Voici un autre exemple typique de l'utilisation du degré topologique.

3.4 Proposition. *Si N est impair, il n'existe pas d'homotopie H telle que :*

$$H \in C(S^{N-1} \times [0,1]; S^{N-1}), \quad H(\cdot,0) = I \ \text{ et } \ H(\cdot,1) = -I.$$

Démonstration. En effet, en utilisant le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn (cf. lemme **1.**3.1) on peut prolonger H en une fonction continue $\widetilde{H} : \overline{B}(0,1) \times [0,1] \to \overline{B}(0,1)$ telle que $\widetilde{H}(\cdot,t) = H(\cdot,t)$ sur S^{N-1}. Alors, en désignant par B la boule unité ouverte, d'après la proposition 2.9 et l'invariance par homotopie on obtient :

$$\begin{aligned} \deg(\widetilde{H}(\cdot,0), B, 0) &= \deg(\widetilde{H}(\cdot,1), B, 0) \\ 1 = \deg(I, B, 0) &= \deg(-I, B, 0) = (-1)^N, \end{aligned}$$

(on utilise ici le corollaire 2.6) et ceci n'est possible que si N est pair. □

3.5 Remarque. Le théorème de point fixe de Brouwer est équivalent à la non-rétraction de la boule unité. En effet, admettons le théorème de point fixe de Brouwer. S'il existe $\varphi : \overline{B} \to S^{N-1}$ telle que $\varphi = I$ sur S^{N-1}, alors la fonction $f(x) := -\varphi(x)$ n'a pas de point fixe dans $\overline{B}$. En effet si $f(x) = x$, on doit avoir $|x| = 1$, et alors

$$-\varphi(x) = x = \varphi(x),$$

ce qui n'est pas possible.

Réciproquement, admettons le théorème de la non-rétraction de la boule unité. Si le théorème de Brouwer était faux, il existerait une fonction continue $f : \overline{B} \to \overline{B}$ telle que pour tout $x \in \overline{B}$ on ait $f(x) \neq x$. Soit alors pour $x \in \overline{B}$, $\lambda := \lambda(x) > 0$ tel que l'on ait $(1 - \lambda(x))f(x) + \lambda(x)x \in S^{N-1}$. On peut montrer que sous les hypothèses que nous avons ici $x \mapsto \lambda(x)$ est continue sur $\overline{B}$ (voir *Exercices*) et qu'en particulier si $x \in S^{N-1}$, on a $\lambda(x) = 1$. En posant alors

$$\varphi(x) := f(x) + \lambda(x)(x - f(x)),$$

on vérifie que φ est continue de $\overline{B}$ dans S^{N-1} et que $\varphi = I$ sur S^{N-1}, ce qui contredit la non-rétraction de la boule unité. □

Nous arrivons maintenant au type de résultats qui ont motivé l'étude du degré topologique en vue de son application dans la théorie des points critiques. Si A est une partie d'un espace vectoriel X, on note $-A$ l'ensemble :

$$-A := \{x \ ; \ x \in X, \ -x \in A\}.$$

On dit que A est *symétrique* (par rapport à l'origine), si on a : $A = -A$. Si f est une fonction définie sur un ensemble symétrique A à valeurs dans un espace vectoriel Y, on dit que f est *impaire* si pour tout $x \in A$ on a : $f(-x) = -f(x)$; si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, on dit que f est *paire*.

Le résultat suivant de Borsuk est très important. Nous en donnons d'abord une version *simple* dans le cas des fonctions de classe C^1 puis, après avoir établi quelques lemmes de prolongement nous donnerons la version complète du théorème de Borsuk.

3.6 Proposition (Borsuk). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, symétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ une fonction* **impaire**. *On désigne par S l'ensemble des points singuliers de f et on suppose que $0 \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Alors :*

- **(i)** *si $0 \in \Omega$, le degré $\deg(f, \Omega, 0)$ est un entier impair ;*
- **(ii)** *si $0 \notin \overline{\Omega}$, le degré $\deg(f, \Omega, 0)$ est un entier pair.*

Démonstration. Rappelons que f étant impaire on a $f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Si $0 \notin \overline{\Omega}$, et si $f^{-1}(\{0\})$ est vide, on sait, d'après la proposition 2.5, que $\deg(f, \Omega, 0)$ est nul. Si $f^{-1}(\{0\})$ est non vide, on a $f^{-1}(\{0\}) = \{x_i, -x_i \ ; \ i = 1, \ldots, m\}$, pour certains $x_i \in \Omega$. On conclut donc que, grâce au lemme 2.10 :

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, 0) &= \sum_{i=1}^{m} \Big[\operatorname{sgn}(J_f(x_i)) + \operatorname{sgn}(J_f(-x_i))\Big] \\ &= 2\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(J_f(x_i)), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Si $0 \in \Omega$, alors ou bien $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ou bien

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \cup \{x_i, -x_i \ ; \ i = 1, \dots, m\},$$

pour des $x_i \in \Omega$ et $x_i \neq 0$. Dans le premier cas on a $\deg(f, \Omega, 0) = \pm 1$, alors que dans le second on voit que

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, 0) &= \pm 1 + \sum_{i=1}^{m} \Big[\operatorname{sgn}(J_f(x_i)) + \operatorname{sgn}(J_f(-x_i)) \Big] \\ &= \pm 1 + 2 \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(J_f(x_i)), \end{aligned}$$

c'est à dire que dans les deux cas le degré est un entier impair. □

En réalité, le résultat que nous venons de voir est vrai pour une fonction continue et impaire de $\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, pourvu que Ω soit symétrique par rapport à l'origine et $0 \notin f(\partial\Omega)$. Pour montrer le résultat dans le cas général, on doit savoir ou bien que l'on peut approcher une fonction impaire par des fonctions impaires et de classe C^1 telles que zéro est une valeur régulière (c'est un résultat de transversalité), ou bien construire une fonction g, impaire et de classe C^1, telle que l'origine ne soit pas valeur singulière de g et telle que f et g aient le même degré topologique à l'origine. C'est ce deuxième point de vue que nous adoptons, en suivant les notes de P.H. Rabinowitz [135] rédigées et mise au point par H. Berestycki (voir aussi E. Zeidler [166, chapter 16], où on trouvera également d'autres applications de ce résultat). Cependant le lecteur qui est seulement intéressé par les applications du théorème de Borsuk, peut éviter les trois lemmes suivants.

3.7 Lemme. *Soient k et N des entiers tels que $k < N$, $A \subset \mathbb{R}^k$ un compact et $f \in C(A; \mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $0 \notin f(A)$. Alors si B est un cube fermé de $\mathbb{R}^k$ tel que $A \subset B$, il existe $g \in C(B; \mathbb{R}^N)$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et $0 \notin g(B)$.*

Démonstration. Soit $\delta := \min_{x \in A} |f(x)|$; comme $\delta > 0$, il existe une fonction $h \in C^1(B; \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\sup_{x \in B} |h(x) - f(x)| < \frac{1}{8}\delta.$$

Si $0 \notin h(B)$, on peut prendre $g := h$. Sinon pour $(x, y) \in B \times \mathbb{R}^{N-k}$ posons $H(x, y) := h(x)$. Comme $N - k \geq 1$, il est clair que pour tout $z \in B \times \mathbb{R}^{N-k}$ on a $\det H'(z) = 0$, et par conséquent d'après le lemme de Sard $H(B \times \mathbb{R}^{N-k}) \equiv h(B)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^N$. On peut donc fixer $b_0 \notin h(B)$ tel que $|b_0| < \delta/8$. Maintenant, en posant $h_0(x) := h(x) - b_0$, on sait que $h_0 \in C^1(B; \mathbb{R}^N)$ et

$$0 \notin h_0(B), \qquad \sup_{x \in A} |h_0(x) - f(x)| < \frac{1}{4}\delta.$$

Par ailleurs, en posant pour $x \in B$:

$$h_1(x) := \begin{cases} h_0(x) & \text{si } |h_0(x)| \geq \dfrac{1}{2}\delta\,, \\ \dfrac{\delta h_0(x)}{2|h_0(x)|} & \text{si } |h_0(x)| \leq \dfrac{1}{2}\delta\,, \end{cases}$$

on vérifie sans peine que pour tout $x \in B$ on a $|h_1(x)| \geq \delta/2$ et que pour $x \in A$ on a $h_1(x) = h_0(x)$, et par conséquent :

$$\sup_{x\in A} |h_1(x) - f(x)| < \frac{1}{4}\delta.$$

En considérant la fonction $\varphi := h_1 - f$ sur A, on sait par le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn qu'il existe $\widetilde{\varphi} \in C(B;\mathbb{R}^N)$ telle que $\widetilde{\varphi} = \varphi$ sur A et

$$\sup_{x\in B} |\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{x\in A} |\varphi(x)| < \frac{1}{4}\delta.$$

En posant finalement $g := h_1 - \widetilde{\varphi}$ sur B, on voit sans difficulté que $g = f$ sur A, et que pour tout $x \in B$ on a $|g(x)| \geq \delta/4 > 0$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Dans le lemme qui suit, nous montrons qu'il est possible de prolonger une fonction impaire sur un ouvert symétrique de $\mathbb{R}^N$ ne contenant pas l'origine, de telle sorte que si la fonction ne s'annule pas sur une partie de $\mathbb{R}^{N-1}$, le prolongement ne s'y annule pas non plus, et en plus il est impair.

3.8 Lemme. *Soient k et N des entiers tels que $k < N$, $\omega \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné et* **symétrique** *tel que $0 \notin \overline{\omega}$, et $f \in C(\partial\omega;\mathbb{R}^N)$ une fonction* **impaire** *telle que $0 \notin f(\partial\omega)$. Alors il existe $g \in C(\overline{\omega};\mathbb{R}^N)$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \partial\omega$, g est impaire et $0 \notin g(\overline{\omega})$.*

Démonstration. Si $k = 1$, alors on peut supposer que

$$\omega \subset [-b,-a] \cup [a,b]\,,$$

pour $b > a > 0$. Si $f_0 := f_{|\partial\omega\cap[a,b]}$, le lemme 3.7 permet de dire que l'on peut prolonger f_0 en une fonction $g_0 \in C([a,b];\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \notin g_0([a,b])$. En posant alors

$$g(x) := \begin{cases} g_0(x) & \text{si } x \in \overline{\omega} \cap [a,b]\,, \\ -\,g_0(-x) & \text{si } x \in \overline{\omega} \cap [-b,-a]\,, \end{cases}$$

on voit que $g \in C(\overline{\omega};\mathbb{R}^N)$ est une fonction impaire et $0 \notin g(\overline{\omega})$.

Lorsque $k \geq 2$, supposons que le lemme est prouvé pour un ouvert ω contenu dans $\mathbb{R}^j$, avec $j \leq k-1$. Nous allons montrer que le résultat du lemme est vrai lorsque $\omega \subset \mathbb{R}^k$. Si $x \in \mathbb{R}^k$, on écrira $x = (x', x_k)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{k-1}$. On sait que la fonction f est définie sur $\partial\left(\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\})\right)$, et l'hypothèse de récurrence permet de construire une fonction impaire $f_1 \in C(\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\});\mathbb{R}^N)$, telle que $f_1 = f$ sur $\partial\left(\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}\right)$, et $0 \notin f_1(\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}))$. En réalité, comme f est définie sur $\partial\omega$, en posant :

$$f_2(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{pour } x \in \overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \,, \\ f(x) & \text{pour } x \in \partial\omega \,, \end{cases}$$

on peut voir que $f_2 \in C\left(\partial\omega \cup (\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\})); \mathbb{R}^N\right)$ est impaire et que

$$0 \notin f_2\left(\partial\omega \cup (\overline{\omega} \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}))\right) \,.$$

En posant maintenant

$$\omega_+ := \{x \in \omega \,;\, x_k > 0\} \,, \qquad \omega_- := \{x \in \omega \,;\, x_k < 0\} \,,$$

et en prenant un cube B contenant ω_+ et inclus dans $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}_+$, le lemme 3.7 permet de conclure qu'on peut prolonger f_2 en une fonction $g_2 \in C(B; \mathbb{R}^N)$ telle que $0 \notin g_2(B)$. Il suffit maintenant de poser

$$g(x) := \begin{cases} g_2(x) & \text{pour } x \in \overline{\omega_+} \,, \\ -\, g_2(-x) & \text{pour } x \in \overline{\omega_-} \,, \end{cases}$$

on voit sans difficulté que $g \in C(\overline{\omega}; \mathbb{R}^N)$ est un prolongement impair de f à $\overline{\omega}$, et que $0 \notin g(\overline{\omega})$. □

3.9 Lemme. *Soient $N \geq 1$ un entier, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et symétrique par rapport à l'origine tel que $0 \notin \overline{\Omega}$ et $f \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors il existe un prolongement g de f tel que $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, g est impaire et $0 \notin g\left(\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})\right)$.*

Démonstration. On sait que si $f_0 := f_{|_{\partial(\Omega \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}))}}$, en utilisant le lemme 3.8 on peut prolonger f_0 en une fonction impaire g_0 continue sur l'adhérence de $\Omega \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, et finalement en une fonction impaire g_1 telle que

$$\begin{aligned} &g_1 \in C\left(\partial\Omega \cup (\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})) \,; \mathbb{R}^N\right) \,, \\ &0 \notin g_1\left(\partial\Omega \cup (\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}))\right) \,. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème de Tietze-Urysohn, on peut prolonger g_1 en une fonction continue g_2 telle que si $\Omega_\pm := \Omega \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_\pm)$, on ait :

$$g_2 \in C\left(\overline{\Omega_+}\right) \,, \qquad 0 \notin g_2\left(\partial\Omega \cup \left[\overline{\Omega_+} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})\right]\right) \,.$$

En posant alors

$$g(x) := \begin{cases} g_2(x) & \text{pour } x \in \overline{\Omega_+} \,, \\ -\, g_2(-x) & \text{pour } x \in \overline{\Omega_-} \,, \end{cases}$$

on peut vérifier facilement que g satisfait le cahier des charges. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème de Borsuk dans le cas général.

3.10 Théorème de Borsuk. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, symétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ une fonction* **impaire** *telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors :*

(i) *si $0 \in \Omega$, le degré $\deg(f,\Omega,0)$ est un entier impair ;*

(ii) *si $0 \notin \overline{\Omega}$, le degré $\deg(f,\Omega,0)$ est un entier pair.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $0 \notin \overline{\Omega}$. En utilisant le lemme 3.9, on sait qu'il existe une fonction impaire g telle que $g = f$ sur $\partial\Omega$ et

$$g \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N), \qquad 0 \notin g(\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})).$$

Soit $\delta > 0$ défini par

$$\delta := \frac{1}{4} \min \left\{ \operatorname{dist}\left(0, g(\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}))\right) \ , \ \operatorname{dist}\left(0, f(\partial\Omega)\right) \right\}.$$

D'après la stabilité du degré topologique, on sait qu'il existe une fonction régulière φ, par exemple dans $C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, telle que φ soit impaire et $\|g - \varphi\|_\infty \leq \delta/4$. On a donc en particulier $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$ et

$$\deg(f,\Omega,0) = \deg(g,\Omega,0) = \deg(\varphi,\Omega,0).$$

Mais comme $0 \notin \varphi(\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}))$ (à cause du choix de δ), en notant comme ci-dessus $\Omega_\pm := \Omega \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_\pm)$, on sait d'après la propriété d'excision que l'on a

$$\begin{aligned} \deg(\varphi,\Omega,0) &= \deg(\varphi, \Omega \setminus (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}), 0) \\ &= \deg(\varphi,\Omega_+,0) + \deg(\varphi,\Omega_-,0)\,. \end{aligned}$$

Maintenant, par le lemme de Sard, on peut affirmer qu'il existe b aussi voisin de l'origine que l'on veut, tel que b et $-b$ soient valeurs régulières de φ et par conséquent $\varphi^{-1}(\{\pm b\}) =: \{\pm x_1, \ldots, \pm x_m\}$ avec $x_j \in \Omega_+$ (et $-x_j \in \Omega_-$). On voit de la sorte que :

$$\deg(\varphi,\Omega_+,0) = \deg(\varphi,\Omega_+,b) = \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn} J_\varphi(x_j)$$

$$\deg(\varphi,\Omega_-,0) = \deg(\varphi,\Omega_-,-b) = \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn} J_\varphi(-x_j)\,.$$

Mais φ étant impaire, on sait que $\varphi'(x_j) = \varphi'(-x_j)$, ce qui nous permet de dire que $\deg(\varphi,\Omega_+,b) = \deg(\varphi,\Omega_-,-b)$, et on voit finalement que $\deg(\varphi,\Omega,0) = \deg(f,\Omega,0)$ est un entier pair, dans le cas où $\overline{\Omega}$ ne contient pas l'origine.

Lorsque $0 \in \Omega$, soit $R > 0$ assez petit pour que $\overline{B}(0,R) \subset \Omega$. En considérant la fonction $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } \ x \in \partial\Omega\,, \\ x & \text{si } \ x \in \overline{B}(0,R)\,, \end{cases}$$

on peut, par le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn, trouver un prolongement $g_1 \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ de $\widetilde{f}$. En posant $g(x) := \left(g_1(x) - g_1(-x)\right)/2$, on

dispose d'une fonction impaire et continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $g = f$ sur $\partial\Omega$, et la proposition 2.9 ainsi que la propriété d'excision permettent de dire :

$$\begin{aligned}\deg(f, \Omega, 0) &= \deg(g, \Omega, 0) \\ &= \deg(g, \Omega \setminus \overline{B}(0, R), 0) + \deg(g, B(0, R), 0)\,.\end{aligned}$$

Or $\deg(g, B(0, R), 0) = 1$ car $g = I$ sur $\overline{B}(0, R)$ (voir corollaire 2.6), alors que $\deg(g, \Omega \setminus \overline{B}(0, R), 0)$ est un entier pair, d'après la première partie de la démonstration. On voit ainsi que le degré $\deg(f, \Omega, 0)$ est un entier impair lorsque Ω contient l'origine, et le théorème de Borsuk est prouvé dans le cas général. □

Si Ω est symétrique et contient l'origine, on voit en particulier que le degré $\deg(f, \Omega, 0)$ est non nul, pourvu que f soit une fonction impaire. Par conséquent, dans ce cas, si b appartient à la composante connexe de $f(\partial\Omega)^c$ qui contient 0, alors $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$: on en conclut, d'après la proposition 2.5 que cette composante connexe est contenue dans $f(\Omega)$. On peut donc énoncer :

3.11 Corollaire. *On suppose que Ω est un ouvert borné et symétrique de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine. Soit $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire, telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors $f(\Omega)$ contient un voisinage ouvert de l'origine.*

La notion qui découle de celle du degré topologique et qui est la plus importante dans la théorie des points critiques est celle du *genre*, basée sur le théorème de Borsuk-Ulam que nous énonçons ci-dessous.

3.12 Théorème (Borsuk-Ulam). *Soient Ω un ouvert symétrique borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, et $\varphi \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$ impaire et telle que $\varphi(\partial\Omega) \subset E_0$, où E_0 est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^N$ de dimension inférieure ou égale à $N - 1$. Alors il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $\varphi(x) = 0$.*

Démonstration. Soit φ comme dans le théorème. D'après le théorème de Tietze-Urysohn il existe un prolongement $\varphi_0 \in C(\overline{\Omega}, E_0)$ tel que $\varphi_0 = \varphi$ sur $\partial\Omega$. En posant

$$\widetilde{\varphi}(x) := \frac{\varphi_0(x) - \varphi_0(-x)}{2},$$

on a un prolongement *impair* de φ à $\overline{\Omega}$, et $\widetilde{\varphi}(\overline{\Omega}) \subset E_0$. Si on avait $0 \notin \widetilde{\varphi}(\partial\Omega) = \varphi(\partial\Omega)$, d'après le corollaire 3.11, $\widetilde{\varphi}(\Omega)$ contiendrait un voisinage ouvert de l'origine, ce qui n'est pas possible, puisque $\widetilde{\varphi}(\overline{\Omega})$ est contenu dans E_0, sous-espace affine de dimension inférieure ou égale à $N - 1$. □

Souvent, on utilise le théorème de Borsuk-Ulam sous la forme suivante : Ω étant un ouvert borné et symétrique de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine, soit f une fonction continue de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$ telle que $f(\partial\Omega) \subset E_0$, sous-espace de dimension au plus $N - 1$. En posant

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

on voit qu'il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $\varphi(x) = 0$. Cela implique donc pour f, l'existence de $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) = f(-x)$, c'est à dire que f prend la même

valeur en deux points diamétralement opposés (ou antipodaux). On vient donc de prouver le corollaire suivant, qui est d'ailleurs équivalent au théorème de Borsuk-Ulam :

3.13 Corollaire. *Soient Ω un ouvert symétrique borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, et $f \in C(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$. On suppose que $f(\partial\Omega) \subset E_0$, où E_0 est un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ de dimension inférieure ou égale à $N-1$. Alors il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

3.14 Exemple. Voici une application (peut-être surprenante) de ce corollaire. Si Ω représente la Terre et que l'on suppose que la température $\theta(x)$ et la pression atmosphérique $p(x)$ au point $x \in \partial\Omega$ sont des fonctions dépendant continûment de x, en posant

$$f(x) := (\theta(x), p(x)),$$

on conclut qu'il existe un point x_0 sur la surface de la Terre telle que

$$(\theta(x_0), p(x_0)) = (\theta(-x_0), p(-x_0)),$$

i.e. la température et la pression sont identiques en deux points antipodaux. □

Le corollaire suivant permet de *distinguer* les différents types de sphères S^n pour $n \geq 0$. En effet si $m < n$, on ne peut pas envoyer de façon *continue et impaire* S^n dans S^m, puisque toute application continue et impaire de S^n dans $\mathbb{R}^m$ doit s'annuler.

3.15 Corollaire. *Soient $n, m \geq 0$ des entiers tels que $n > m$. Alors il n'existe pas d'application continue et impaire de $S^n \longrightarrow S^m$.*

4. Le genre

On peut distinguer deux ensembles finis, en comparant le nombre de leurs éléments. Pour distinguer deux espaces vecoriels de dimension finie on compare leur dimension : si E, F sont des espaces vectoriels de dimension n et m, alors $n > m$, si, et seulement si, il n'y a pas d'application linéaire injective de E dans F. Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent (corollaire 3.15) qu'un certain analogue de ce point de vue est vrai pour les sphères S^n. La notion de *genre* que nous allons définir nous permet de *distinguer* deux ensembles A, B fermés, symétriques et ne contenant pas l'origine, en regardant s'il existe une fonction continue et impaire de A dans B. Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, en ce qui concerne les méthodes variationnelles que nous étudierons plus loin, le résultat le plus important de ce chapitre que l'on doit connaître est celui que nous présentons ici. Il faut également savoir que pour différents types de problèmes, il faut introduire des notions adéquates d'*indices* topologiques ; la notion de genre correspond à la notion d'indice pour les ensembles invariants sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$, et de ce fait joue un rôle important dans le cadre des problèmes variationnels qui ont une invariance sous l'action de ce groupe. Voir

par exemple V. Benci [17], E.R. Fadell, S.Y. Husseini & P.H. Rabinowitz [64]. Pour avoir un aperçu de ce sujet dans d'autres applications, en particulier dans l'étude des systèmes hamiltoniens, on pourra consulter le livre de J. Mawhin & M. Willem [114], ainsi que les références qu'y sont données.

4.1 Définition. *Soit E un espace de Banach. On désigne par $s(E)$ l'ensemble des parties fermées symétriques de E ne contenant pas l'origine, plus précisément :*

$$s(E) := \{A \subset E \ ; \ A \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin A, \ -A = A\} .$$

Si $A \in s(E)$ on appelle **genre** *de A le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par :*

$$\gamma(A) := \inf \{n \geq 1 \ ; \ \exists \varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ continue et impaire}\} .$$

Par commodité on posera $\gamma(\varnothing) = 0$.

Comme toujours, s'il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ et de fonction φ continue et impaire de A dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose $\gamma(A) = +\infty$. On notera également que $\gamma(A)$ aurait pu être défini par :

$$\gamma(A) := \inf \left\{n \geq 1 \ ; \text{ il existe } \varphi : A \longrightarrow S^{n-1} \text{ continue et impaire}\right\} .$$

Il est important de noter que le genre n'est défini que pour des ensembles *fermés*. Voici quelques exemples concrets.

4.2 Exemple. Soit $x_0 \in E$, $R < |x_0|$ et $A := \overline{B}(x_0, R) \cup \overline{B}(-x_0, R)$. Alors A est de genre un : $\gamma(A) = 1$. En effet il suffit de poser $\varphi(x) := +1$ si $x \in \overline{B}(x_0, R)$, et $\varphi(x) := -1$ si $x \in \overline{B}(-x_0, R)$. □

4.3 Exemple. Voici une classe importante d'ensembles de genre N. Soient $E = \mathbb{R}^N$ et Ω un ouvert borné symétrique de E contenant l'origine. Alors $\gamma(\partial\Omega) = N$. En effet on sait déjà, grâce à l'injection canonique de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$, que $\gamma(\partial\Omega) \leq N$. Si on avait $\gamma(\partial\Omega) \leq N - 1$, alors il existerait $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$ impaire et continue. Or d'après le théorème de Borsuk-Ulam φ doit s'annuler quelque part sur $\partial\Omega$, ce qui est en contradiction avec le fait que φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$. □

Nous regroupons ci-dessous les propriétés essentielles du genre que nous serons amenés à utiliser fréquemment.

4.4 Théorème (Propriétés du genre). *Soit E un espace de Banach et $A, B \in s(E)$.*
(i) *S'il existe $f : A \longrightarrow B$ continue et impaire, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*
(ii) *Si $A \subset B$ alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*
(iii) *S'il existe un homéomorphisme impair $f : A \longrightarrow B$ alors $\gamma(A) = \gamma(B)$.*
(iv) *γ est sous-additif : $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.*
(v) *Si A est compact alors $\gamma(A) < \infty$.*
(vi) *Si A est compact, alors il existe un voisinage fermé de A ayant le même genre que A. Plus précisément, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si*

$$A_\varepsilon := \{x \in E \,;\, \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$$

on a $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$.
(vii) *Si* $\gamma(B) < \infty$, *alors* $\gamma(\overline{A \setminus B}) = \gamma(\overline{A \cap B^c}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

Démonstration. (i) Si on a $\gamma(B) = +\infty$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc que B est de genre fini et posons $n := \gamma(B)$. Il existe alors une fonction $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ continue et impaire. On voit donc que

$$\varphi \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

est continue et impaire et par conséquent $\gamma(A) \leq n$, i.e. $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
(ii), **(iii)** On voit sans peine que ces propriétés découlent de **(i)**.
(iv) Si le genre de A, ou celui de B, est égal à l'infini, on n'a rien à prouver. Supposons donc que A et B sont de genres finis et soient $m := \gamma(A)$, $n := \gamma(B)$. Il existe alors deux fonctions φ, ψ continues et impaires :

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \qquad \psi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Par le théorème de Tietze-Urysohn on peut prolonger φ et ψ en des fonctions continues et impaires définies sur E, i.e. il existe $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ telles que :

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad \widetilde{\varphi} \quad \text{continue et impaire,} \quad \widetilde{\varphi} = \varphi \quad \text{sur } A \\ &\widetilde{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \widetilde{\psi} \quad \text{continue et impaire,} \quad \widetilde{\psi} = \psi \quad \text{sur } B. \end{aligned}$$

Alors en posant $f(x) := (\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\psi}(x))$, pour $x \in A \cup B$, on a une fonction continue et impaire de $A \cup B$ dans $\mathbb{R}^{n+m} \setminus \{0\}$. (Pour voir que pour tout $x \in A \cup B$ on a $f(x) \neq (0, 0)$, il suffit de noter qu'un tel point x est dans A, ou bien dans B : par exemple si $x \in A$ alors $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \neq 0$). On conclut donc que $\gamma(A \cup B) \leq n+m$.
(v) Soit $x \in A$. Comme l'origine n'appartient pas à A, on a $x \neq 0$ et en prenant $R(x) < |x|$ (par exemple $R(x) := \frac{1}{2}|x|$) on a

$$\overline{B}(x, R(x)) \cap \overline{B}(-x, R(x)) = \varnothing.$$

Posons alors $\omega(x) := B(x, R(x)) \cup B(-x, R(x))$ et $A(x) := \overline{\omega(x)}$. D'après l'exemple 4.2 que nous avons vu ci-dessus, on sait que $\gamma(A(x)) = 1$. De façon évidente, la famille $(\omega(x))_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A et, celui-ci étant compact, il existe $n \geq 1$ et un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \omega(x_i).$$

On en conclut en particulier que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A(x_i),$$

et la propriété de sous-additivité du genre (propriété **(iv)**) et le fait que $A(x_i)$ est de genre 1, impliquent que $\gamma(A) \leq n$, c'est à dire que A est de genre fini.

(vi) On sait que A est de genre fini : soient $n := \gamma(A)$, et une fonction $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ continue et impaire. Par le théorème de Tietze-Urysohn il existe un prolongement $\widetilde{\varphi}$ continu et impair de E dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble A_ε étant comme dans l'énoncé du théorème, comme A est compact et $0 \notin \varphi(A)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 \notin \widetilde{\varphi}(A_\varepsilon).$$

En effet sinon il existerait une suite $(x_k)_k$ de E, et une suite $(y_k)_k$ de A telles que

$$\widetilde{\varphi}(x_k) = 0, \qquad d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Puisque A est compact, *modulo* une extraction de sous-suite, on peut supposer que la suite $y_k \to y \in A$, et que par conséquent $x_k \to y$. On aurait alors $0 = \widetilde{\varphi}(x_k) \to \widetilde{\varphi}(y)$, c'est à dire que $\widetilde{\varphi}(y) = 0$. Or $y \in A$ et $\widetilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$ et φ ne s'annule pas sur A.

Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\widetilde{\varphi}$ envoie A_ε dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; comme $\widetilde{\varphi}$ est continue et impaire on a $\gamma(A_\varepsilon) \leq n$, et d'après la propriété de croissance du genre (propriété **(ii)**) :

$$n = \gamma(A) \leq \gamma(A_\varepsilon) \leq n.$$

(vii) On a $A \subset B \cup \overline{(A \setminus B)}$. En utilisant **(ii)** on voit que

$$\gamma(A) \leq \gamma(B) + \gamma(\overline{A \setminus B}),$$

et puisque $\gamma(B)$ est fini, on a $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$. □

4.5 Remarque. Si E est de dimension infinie, alors A_ε n'est pas compact, mais cependant est de genre fini. □

Lorsque Ω est un ouvert borné et symétrique de $\mathbb{R}^N$ et φ une application continue et impaire de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^m$, on peut obtenir des informations sur *la taille* de l'ensemble des solutions de l'équation

$$x_0 \in \partial\Omega, \qquad \varphi(x_0) = 0,$$

en utilisant la notion de genre.

4.6 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné symétrique de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine et φ une fonction continue et impaire de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que $m \leq N - 1$ et on considère l'ensemble :*

$$A := \{x \in \partial\Omega \,; \quad \varphi(x) = 0\}.$$

Alors on a : $\gamma(A) \geq N - m$.

Démonstration. Soit, pour $\delta > 0$:

$$B_\delta := \{x \in \partial\Omega \,; \quad |\varphi(x)| \geq \delta\}.$$

On voit que $\varphi : B_\delta \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est continue et impaire et, par conséquent, on a $\gamma(B_\delta) \leq m$. En utilisant la propriété (vii) du théorème 4.4, on conclut que :

$$\gamma(\overline{\partial\Omega \setminus B_\delta}) \geq N - \gamma(B_\delta) \geq N - m.$$

Or $\overline{\partial\Omega \setminus B_\delta} = \{x \in \partial\Omega\,;\, |\varphi(x)| \leq \delta\} =: C_\delta$. Nous allons montrer que si $\delta > 0$ est assez petit, A_ε étant défini comme dans le théorème 4.4 (vi), alors :

$$A \subset C_\delta \subset A_\varepsilon, \tag{4.1}$$

ce qui, compte tenu des propriétés (ii) et (vi) du théorème 4.4, implique que : $\gamma(C_\delta) = \gamma(A)$. Pour montrer (4.1), soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$; alors il existe $\delta > 0$ assez petit tel que : $C_\delta \subset A_\varepsilon$. En effet si cela n'était pas vrai, il existerait une suite $x_k \in \partial\Omega$ telle que

$$|\varphi(x_k)| \leq \frac{1}{k}\,, \qquad d(x_k, A) > \varepsilon.$$

Le bord $\partial\Omega$ étant compact, on pourrait extraire une sous-suite $(x_{k_i})_i$ telle que : $x_{k_i} \to x^*$ lorsque $i \to +\infty$. En passant à la limite on aurait donc :

$$\varphi(x^*) = 0, \qquad d(x^*, A) \geq \varepsilon,$$

ce qui est absurde, vu la définition de A. Cela montre les inclusions (4.1) et la proposition est prouvée. □

4.7 Remarque. Soit $A \in s(E)$. On peut montrer (voir *Exercices*) que $\gamma(A) = n$ si, et seulement si, n est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que A peut être recouvert par k ensembles de genre 1. Cela est à rapprocher avec la notion de *catégorie* de Ljusternik-Schnirelman. Cette notion est définie comme suit. Si X est un espace topologique et A est une partie fermée non vide de X on dit que A est de catégorie 1 dans X, et on écrit $\mathrm{cat}_X(A) = 1$, s'il existe une homotopie $H \in C(A \times [0,1], X)$ et un point $x_0 \in X$ tels que pour tout $x \in A$ on ait :

$$H(x,0) = x, \quad \text{et} \quad H(x,1) = x_0.$$

Ensuite, pour toute partie A fermée non vide de X on pose :

$$\mathrm{cat}_X(A) := \inf\Big\{n \geq 1\,;\, \exists\, A_1, \ldots, A_n \text{ fermés de } X \text{ tels que } \mathrm{cat}_X(A_i) = 1 \text{ et } A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\Big\}.$$

Comme nous le verrons par la suite, la notion de catégorie a été utilisée par L. Ljusternik & L. Schnirelman [107] pour montrer (notamment) que si $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonction paire et $J := F_{|S^{n-1}}$, alors J possède au moins n valeurs critiques sur S^{n-1}. Au chapitre **4** nous montrerons ce résultat en utilisant la notion de genre. Dans certains problèmes variationnels on peut utiliser la notion de catégorie pour montrer de tels résultats, mais en général, pour les équations aux dérivées partielles elliptiques semilinéaires, il est plus commode d'utiliser la notion de genre. □

5. Degré topologique de Leray-Schauder

Dans la résolution des équations aux dérivées partielles, on est constamment amené à utiliser des théorèmes de point fixe, mais en règle générale ces théorèmes doivent être appliqués dans des espaces de dimension infinie. Au paragraphe § 2, nous avons vu que la notion du degré topologique dans un espace de dimension finie permettait de prouver le théorème de point fixe de Brouwer pour des applications continues d'un convexe fermé dans lui-même. L'exemple suivant permet de comprendre qu'il n'est pas possible d'étendre, telle quelle, la notion du degré topologique de Brouwer aux espaces de dimension infinie : on exhibe une application continue de la boule unité de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ dans elle-même qui n'a pas de point fixe.

5.1 Exemple. Soient $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x := (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable et K la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{N})$. On désignera par $|x|$ la norme de x i.e.

$$|x|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Si $x \in K$ on définit Tx par :

$$Tx := (\sqrt{1-|x|^2}, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots).$$

On vérifie sans peine que T est continue, que $Tx \in K$ et que plus précisément $|Tx| = 1$. Cependant T ne possède aucun point fixe dans K, car si $x = Tx$, on doit avoir pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n$ et $x_0 = \sqrt{1-|x|^2}$. Or $|x| = |Tx| = 1$ et par conséquent $x_0 = 0$: d'où $x = 0$, ce qui contredit $|x| = 1$. □

Rappelons aussi (cf. *Exercices*) que dans un espace de dimension infinie, une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés, ce qui entraîne des difficultés considérables dans l'étude des équations non linéaires. En fait le bon cadre, pour introduire une notion de degré topologique et établir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer, est celui des opérateurs compacts.

5.2 Définition. *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. Si $T : \Omega \longrightarrow X$ est un opérateur continu, on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans X.*

On notera en particulier que si T est compact, alors T est borné sur les parties bornées de X.

5.3 Exemple. Naturellement une application linéaire compacte l'est aussi au sens de la définition 5.2. De même, si T_1 est un opérateur continu borné de X dans X et L un opérateur linéaire compact, alors $T := L \circ T_1$ est un opérateur compact au sens de la définition ci-dessus (rappelons qu'un opérateur est dit borné s'il est borné sur les parties bornées). □

On va définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité, i.e. des opérateurs Φ du type $\Phi := I - T$

où T est compact et I désigne l'application identité de X. Le point de départ est toutefois le degré topologique de Brouwer. Sans perte de généralité, on peut supposer que le point *cible* est l'origine.

On commence par quelques lemmes concernant les opérateurs compacts. Dans toute la suite X est un espace de Banach et sa norme est notée $\|\cdot\|$.

5.4 Lemme. *Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on ait :*

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

Démonstration. Sinon il existerait une suite $(u_n)_n$ de $\partial\Omega$ telle que

$$\|u_n - Tu_n\| \to 0.$$

Or T étant compact et $\overline{\Omega}$ borné, on pourrait trouver une sous-suite $(Tu_{n_i})_i$ et $y \in X$ tels que $Tu_{n_i} \to y$ lorsque $i \to +\infty$. On en déduit que $u_{n_i} \to y$ et par conséquent, T étant continu, on a $y - Ty = 0$, ce qui signifie y est point fixe de T. Comme $y \in \partial\Omega$, cela contredit l'hypothèse sur T. □

5.5 Lemme. *Soit Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ tels que :*

$$\begin{aligned} \forall\, u \in \overline{\Omega}, &\qquad \|T_\varepsilon u - Tu\| \leq \varepsilon, \\ \forall\, u \in \partial\Omega, &\qquad \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration. On sait, d'après le lemme 5.4, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, u \in \partial\Omega, \qquad \|u - Tu\| \geq 4\varepsilon.$$

Comme $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans X, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $T(\overline{\Omega})$ tels que

$$T(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons, pour $x \in X$, $\lambda_i(x) := (\varepsilon - \|x - x_i\|)^+$, puis pour $x \in T(\overline{\Omega})$:

$$j_\varepsilon(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)}.$$

Enfin, en introduisant l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$, c'est à dire l'espace $E_\varepsilon := \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour $u \in \overline{\Omega}$ l'application :

$$T_\varepsilon(u) := j_\varepsilon(Tu),$$

$T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est continu et $T_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset E_\varepsilon$. Comme par ailleurs, pour tout $x \in T(\overline{\Omega})$, on a $\lambda_i(x)\|x - x_i\| \leq \lambda_i(x)\varepsilon$, on en conclut sans difficulté que $\|x - j_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ pour de tels x. Cela implique que si $u \in \overline{\Omega}$, alors :

$$\|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, si $u \in \partial\Omega$ on a :

$$\begin{aligned}\|u - T_\varepsilon u\| &= \|u - Tu + Tu - T_\varepsilon u\| \\ &\geq \|u - Tu\| - \|Tu - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon > 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que T_ε répond aux exigences du lemme. □

Nous allons maintenant voir que l'approximation T_ε et l'espace de dimension finie E_ε permettent de définir le degré topologique de $I - T$. Pour cela nous commençons par montrer le lemme suivant.

5.6 Lemme. *Soit Ω un ouvert borné de X, et $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$, et $\varepsilon > 0$ tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ sur $\partial\Omega$. On suppose que $T_{1\varepsilon}$ et $T_{2\varepsilon}$ sont deux approximations de T, telles que pour $i = 1, 2$ on ait : $T_{i\varepsilon}(\Omega) \subset E_\varepsilon$, où E_ε est un sous-espace de dimension finie de X, et de plus $\|T_{i\varepsilon} - Tu\| \leq \varepsilon$ pour $u \in \Omega$, et $\|u - T_{i\varepsilon}u\| \geq 3\varepsilon$ pour $u \in \partial\Omega$. Alors, si F est un s.e.v. de dimension finie de X contenant E_ε tel que $\Omega_F := \Omega \cap F \neq \varnothing$, on a :*

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = \deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

Démonstration. Il faut préciser avant tout que $I - T_{i\varepsilon}$ est considéré comme opérateur défini sur $\overline{\Omega}_F$ à valeurs dans F, et de ce fait on peut parler de son degré topologique (au sens de Brouwer).

Soit $\partial\Omega_F = \partial\Omega \cap F$ le bord de Ω_F. Comme $T_{i\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, le degré de $I - T_{i\varepsilon}$ en 0 est défini. Pour $t \in [0, 1]$ soit :

$$H(u, t) := tT_{1\varepsilon}(u) + (1 - t)T_{2\varepsilon}(u).$$

On voit sans peine que $\|H(u, t) - Tu\| \leq \varepsilon$ pour tous $t \in [0, 1]$, $u \in \overline{\Omega}$ et en particulier pour $u \in \Omega_F$; d'autre part pour $u \in \partial\Omega$, et donc pour $u \in \partial\Omega_F$, on a

$$\|u - H(u, t)\| = \|u - Tu + Tu - H(u, t)\| \geq 3\varepsilon.$$

Par conséquent $H \in C(\Omega_F \times [0, 1], F)$ est une homotopie admissible pour appliquer la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique de Brouwer, ce qui donne :

$$\deg(I - H(\cdot, 0), \Omega_F, 0) = \deg(I - H(\cdot, 1), \Omega_F, 0),$$

c'est à dire le résultat annoncé par le lemme. □

Dans le lemme qui suit on va voir comment on peut lier les degrés topologiques dans des espaces de dimensions différentes.

5.7 Lemme. *Soient E_n, E_p deux sous-espaces de dimension finie et $\omega \subset E_n \times E_p$ un ouvert borné. On identifie $E_n \times \{0\}$ à E_n et on suppose que*

$$\omega_n := \omega \cap (E_n \times \{0\}) \neq \varnothing.$$

Soient $\varphi \in C(\overline{\omega}, E_n)$ et $f(x,y) := (x - \varphi(x,y), y)$ pour $(x,y) \in E_n \times E_p$. On suppose que pour tout x tel que $(x,0) \in \partial\omega$, on a $\varphi(x,0) \neq (x,0)$, et on considère la fonction $f_0(x) = x - \varphi(x,0)$ définie sur $\overline{\omega_n}$. Alors, en notant $\deg_n, \deg_{n+p}$ les degrés topologiques dans E_n et $E_{n+p} := E_n \times E_p$ respectivement, on a :

$$\deg_{n+p}(f, \omega, 0) = \deg_n(f_0, \omega_n, 0).$$

Démonstration. Il faut remarquer que $f(\overline{\omega})$ n'est pas contenu dans E_n, et que d'autre part les degrés sont bien définis : en effet cela fait partie des hypothèses pour f_0 (puisque $\partial\omega_n \subset \partial\omega \cap (E_n \times \{0\})$), et en ce qui concerne f, on peut voir que :

$$(x,y) \in \partial\omega, \qquad f(x,y) = (0,0),$$

implique $(\varphi(x,y),0) = (x,y)$, i.e. $f_0(x) = 0$, avec$(x,0) \in \partial\omega$, ce qui est exclu.

Soit $(\varphi_j)_j$ une suite de $C^1(\overline{\omega}, E_n)$ telle que $\varphi_j \to \varphi$ dans $C(\overline{\omega}, E_n)$. On pose

$$f_j(x,y) := (x - \varphi_j(x,y), y) \quad \text{et} \quad f_{0j}(x) := x - \varphi_j(x,0).$$

Alors, pour j assez grand, on a

$$\begin{aligned} \deg_{n+p}(f, \omega, 0) &= d_{n+p}(f_j, \omega, 0) \\ d_n(f_0, \omega_n, 0) &= d_n(f_{0j}, \omega, 0), \end{aligned}$$

et par conséquent, sans perte de généralité, on peut donc supposer que f est de classe C^1 et que 0_{n+p} (l'origine dans $E_n \times E_p$) est une valeur régulière de f, alors que 0_n est valeur régulière de f_0. Pour calculer le degré de f il faut calculer f', ce qui donne :

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} I_n - \partial_x\varphi(x,y) & -\partial_y\varphi(x,y) \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, comme on vient de le voir, $f(x,y) = (0,0)$ équivaut à $y = 0$ et $f_0(x) = 0$, d'où on conclut que $J_f(x,0) = J_{f_0}(x)$. En utilisant le lemme 2.10, on a :

$$\begin{aligned} \deg_{n+p}(f, \omega, 0) &= \sum_{(x,0) \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_f(x,0)) \\ &= \sum_{x \in f_0^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{f_0}(x)) \\ &= \deg_n(f_0, \omega_n, 0), \end{aligned}$$

et la preuve du lemme est terminée. □

5.8 Théorème & Définition (Leray-Schauder). *Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$, et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme 5.5 on considère F, un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε et tel que $\Omega_{_F} := F \cap \Omega \neq \varnothing$. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) := \deg_{_F}(I_{_F} - T_\varepsilon, \Omega_{_F}, 0_{_F})\,.$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $b \in X$ est tel que $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à la cible b est défini comme étant :

$$\deg(I - T, \Omega, b) := \deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

Démonstration. Il faut remarquer que d'après les propriétés de ε, T_ε et E_ε on a :

$$\begin{aligned} \forall u \in \overline{\Omega}, \qquad & \|Tu - T_\varepsilon u\| \leq \varepsilon, \\ \forall u \in \partial\Omega, \qquad & \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon\,. \end{aligned}$$

et par conséquent si $\Omega_{_F} \neq \varnothing$, d'après le lemme 5.6 le degré

$$\deg(I_{_F} - T_\varepsilon, \Omega_{_F}, 0_{_F})$$

est bien défini. Pour voir que ce degré ne dépend que de T et de Ω, on va considérer deux familles (pour $i = 1, 2$) $\varepsilon_i > 0$, $T_{i\varepsilon_i}, E_{i\varepsilon_i}$ et F_i comme ci-dessus et on va montrer que le degré est le même. Pour cela on appliquera le lemme 5.7 dans un espace de dimension finie contenant F_1 et F_2. Soient :

$$F := F_1 \oplus F_2, \qquad \Omega_{_F} := \Omega \cap F.$$

Alors en désignant par $\deg_{_F}$ le degré topologique de Brouwer dans F, on sait, d'après le lemme 5.5 que :

$$\deg_{_F}(I_{_F} - T_{1\varepsilon_1}, \Omega_{_F}, 0_{_F}) = \deg_{_F}(I_{_F} - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_{_F}, 0_{_F}).$$

Par ailleurs, le lemme 5.6 nous dit que pour $i = 1, 2$ on a :

$$\deg_{_F}(I_{_F} - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_{_F}, 0_{_F}) = \deg_{_{F_i}}(I_{_{F_i}} - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_{_{F_i}}, 0_{_{F_i}}).$$

Finalement on en conclut que :

$$\deg_{_{F_1}}(I_{_{F_1}} - T_{1\varepsilon_1}, \Omega_{_{F_1}}, 0_{_{F_1}}) = \deg_{_{F_2}}(I_{_{F_2}} - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_{_{F_2}}, 0_{_{F_2}}).$$

On remarque également que si T est compact et $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$, l'application $u \mapsto b + Tu$ est compacte et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Par conséquent la définition du degré de $I - T$ dans Ω par rapport à b a un sens. □

6. Propriétés du degré de Leray-Schauder

Dans ce paragraphe nous réunissons les propriétés les plus importantes du degré topologique de Leray-Schauder. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues du degré de Brouwer. C'est pourquoi nous nous bornerons à énoncer les résultats qui suivent sans démonstration. Dans toute la suite on suppose que X est un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \Omega \longrightarrow X$ un opérateur compact.

6.1 Proposition (additivité). *Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints et $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \longrightarrow X$ est un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors :*

$$\deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

6.2 Proposition. *Si $b \in X$ est tel que pour tout $u \in \overline{\Omega}$ on a :*

$$u - Tu \neq b,$$

alors $\deg(I - T, \Omega, b) = 0$.

6.3 Corollaire. *Si $b \in X$ est tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a $u - Tu \neq b$ et*

$$\deg(I - T, \Omega, b) \neq 0,$$

alors il existe $u \in \Omega$ tel que $u - Tu = b$.

6.4 Proposition. *Soient T_1, T_2 des applications compactes de $\overline{\Omega}$ dans X et $b \in X$ tel que :*

$$4\varepsilon := \operatorname{dist}(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) > 0.$$

Alors si $\sup_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon$, *on a :*

$$\deg(I - T_1, \Omega, b) = \deg(I - T_2, \Omega, b).$$

6.5 Corollaire. *Soient $b \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ une application compacte, telle que pour tout $(u,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ on ait : $u - H(u,t) \neq b$. Alors le degré* $\deg(I - H(\cdot,t), \Omega, b)$ *est constant pour $t \in [0,1]$:*

$$\deg(I - H(\cdot,t), \Omega, b) = \deg(I - H(\cdot,0), \Omega, b).$$

6.6 Proposition. *Soient $b, b' \in X$ tels que $b, b' \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Alors si b et b' appartiennent à la même composante connexe de $X \setminus (I - T)(\partial\Omega)$, on a :*

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T, \Omega, b').$$

7. Exemples d'application

Au chapitre suivant nous verrons quelques utilisations du degré topologique de Leray-Schauder, dans le cadre des techniques de points critiques. Cependant dans un certain nombre de problèmes semilinéaires on peut utiliser directement le degré topologique pour établir l'existence de solutions. Comme les deux approches se complètent et permettent de mieux comprendre les diverses situations, dans ce paragraphe nous donnons deux exemples typiques de l'utilisation du degré topologique pour résoudre des problèmes semilinéaires.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une matrice $a := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ coercive à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, telle que pour un $\alpha > 0$, on ait $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On sait d'après les résultats du paragraphe § **1.**9 que l'opérateur

$$\begin{cases} Au := -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u), \\ D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ Au \in L^2(\Omega)\right\}, \end{cases} \tag{7.1}$$

définit un opérateur d'inverse compact sur $L^2(\Omega)$; en particulier on sait (cf. paragraphe § **1.**12) que le spectre de A est une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ telle que $|\lambda_k| \to \infty$ et que $\lambda_1 > 0$. Soit maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$g \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} =: \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

On va montrer le résultat suivant :

7.1 Proposition. *On suppose que l'opérateur A est donné par (7.1) et que g vérifie (7.2). Alors si $\lambda \notin \{\lambda_k\ ;\ k \geq 1\}$, pour tout $h \in L^2(\Omega)$ il existe au moins une fonction $u \in D(A)$ telle que*

$$Au = g(u) + h. \tag{7.3}$$

Démonstration. Il est clair qu'on peut supposer que $g(0) = 0$, sans perte de généralité. Comme pour une constante $C > 0$ on a $|g(s)| \leq C\,(1 + |s|)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur $u \mapsto g(u)$ de $L^2(\Omega)$ dans lui-même est continu. Comme A^{-1} est compact sur $L^2(\Omega)$ (car son image est précisément $D(A)$ qui est contenu dans $H_0^1(\Omega)$, lequel a une injection compacte dans $L^2(\Omega)$ d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), en posant

$$H(u,t) := A^{-1}\left(tg(u) + (1-t)\lambda u + h\right),$$

pour $0 \leq t \leq 1$, on a une homotopie compacte de $L^2(\Omega) \times [0,1] \longrightarrow L^2(\Omega)$ (à ce propos on aura noté que $u \mapsto g(u)$ est un opérateur continu, borné sur les bornés de $L^2(\Omega)$). Or la résolution de l'équation (7.3) équivaut à trouver $u \in L^2(\Omega)$ telle que $u = A^{-1}\left(g(u) + h\right)$, ou encore à :

$$u \in L^2(\Omega), \qquad u - H(u,1) = 0. \tag{7.4}$$

Comme $u \mapsto u - H(u,1)$ est une perturbation compacte de l'identité, si on trouve une boule de $L^2(\Omega)$, par exemple $B(0,R)$ pour un certain $R > 0$, telle que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $0 \notin H(\partial B(0,R) \times [0,1])$, le corollaire 6.5 permet de dire que

$$\deg\left(H(\cdot,t),B(0,R),0\right)=\deg\left(H(\cdot,0),B(0,R),0\right),$$

et si on sait que ce dernier degré est non nul, le corollaire 6.3 implique que l'équation (7.4) admet au moins une solution.

Nous commençons par établir l'existence d'une telle boule, autrement dit nous allons montrer qu'il existe $R>0$ tel que, $\|\cdot\|$ étant la norme de $L^2(\Omega)$, on ait :

$$\forall (u,t)\in L^2(\Omega)\times[0,1],\qquad u-H(u,t)=0\Longrightarrow\|u\|<R. \tag{7.5}$$

Pour montrer cette estimation *a priori* nous allons raisonner par l'absurde en suppossant qu'il existe une suite $(u_n,t_n)\in L^2(\Omega)\times[0,1]$ telle que

$$u_n-H(u_n,t_n)=0\quad\text{et}\quad\alpha_n:=\|u_n\|\geq n.$$

En posant $v_n:=u_n/\alpha_n$, on sait que v_n vérifie l'équation

$$v_n\in D(A),\quad\|v_n\|=1,\qquad Av_n=t_n\frac{g(\alpha_n v_n)}{\alpha_n}+(1-t_n)\lambda v_n+\frac{h}{\alpha_n}. \tag{7.6}$$

Comme $g(s)\leq C(1+|s|)$, on conclut que le second membre de cette équation est bornée dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de n et par conséquent pour une constante $R_0>0$ on a $\|v_n\|_{D(A)}\leq R_0$. Puisque l'injection de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, en extrayant une sous-suite, encore notée (v_n,t_n), on peut donc supposer que pour un $v\in L^2(\Omega)$ on a $v_n\to v$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. sur Ω et que $t_n\to t\in[0,1]$; en particulier on notera que $\|v\|=1$. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on peut facilement voir que $g(\alpha_n v_n)/\alpha_n$ converge vers λv dans $L^2(\Omega)$; ainsi d'après (7.6) on a

$$v_n\to v\quad\text{dans }L^2(\Omega),\qquad Av_n\to\lambda v\quad\text{dans }L^2(\Omega),$$

ce qui implique, A étant un opérateur fermé, que $v\in D(A)$ et $Av=\lambda v$. Or $\|v\|=1$, et cette dernière égalité implique que λ est une valeur propre de A, contrairement à l'hypothèse. On conclut finalement que l'estimation *a priori* (7.5) est vraie.

Ainsi on peut donc affirmer que pour tout $t\in[0,1]$ le degré topologique

$$\deg\left(H(\cdot,t),B(0,R),0\right)$$

est bien défini et constant. Or pour $t=0$, $u\mapsto u-\lambda A^{-1}u$ est un opérateur linéaire et il est facile (voir *Exercices*) de vérifier que

$$\begin{aligned}\deg\left(I-H(\cdot,0),B(0,R),0\right)&=\deg\left(I-\lambda A^{-1},B(0,R),A^{-1}h\right)\\&=\pm1.\end{aligned}$$

On conclut enfin la preuve de la proposition, en invoquant le corollaire 6.3. □

7.2 Remarque. Si $(A,D(A))$ est un opérateur à résolvante compacte agissant dans $L^2(\Omega)$, le même résultat (avec la même démonstration) reste vraie : si $\lambda\notin\mathrm{Sp}(A)$ (le spectre de A) et g est comme dans (7.2), pour tout $h\in L^2(\Omega)$, il

existe $u \in D(A)$ tel que $Au = g(u) + h$. On peut également remplacer l'espace $L^2(\Omega)$ par $L^p(\Omega)$ ou $C(\overline{\Omega})$. □

On voit lors de cette démonstration que le point clé est l'existence d'une estimation *a priori* sur d'éventuelles solutions de l'équation (7.3). Mais cependant la condition sur λ n'est pas la plus générale possible, même si elle est "presque" optimale. Pour le voir considérons cette équation dans le cas particulier où A est auto-adjoint, i.e. $a_{ij} = a_{ji}$, écrite sous la forme

$$Au = \lambda u + g_0(u) + h, \tag{7.7}$$

où $g_0 \in C(\mathbb{R})$ vérifie $\lim_{|s|\to\infty} g_0(s)/s = 0$. Par exemple si $g_0 \equiv 0$, on sait que toutes les valeurs propres de A sont réelles et que si λ est valeur propre, l'équation $Au = \lambda u + h$ n'admet de solution que si $h \in N(A - \lambda I)^\perp$ (ici $N(A - \lambda I)$ désigne le noyau de $A - \lambda I$). Cela prouve que la résolubilité de (7.3) ou (7.7) pour tout $h \in L^2(\Omega)$ dépend du fait que λ est valeur propre ou non. Nous allons néanmoins étudier (7.7) dans le cas où λ est une valeur propre de l'opérateur auto-adjoint A (ce résultat a été prouvé par E.M. Landesman & A.C. Lazer [93] dans le cas où λ est une valeur propre simple ; nous suivons ici la démonstration plus générale et plus simple donnée dans Th. Gallouët & O. Kavian [71]).

7.3 Proposition. *Soient $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte sur $L^2(\Omega)$ et $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ la suite de ses valeurs propres. On suppose que $g_0 \in C(\mathbb{R})$ est telle que $\lim_{|s|\to\infty} g_0(s)/s = 0$ et que $\gamma_- \leq g_0(s) \leq \gamma_+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ où on suppose que*

$$\gamma_\pm := \lim_{s\to\pm\infty} g_0(s)$$

existent. Pour $k \geq 1$ fixé, si $h \in L^2(\Omega)$ est tel que l'équation :

$$u \in D(A), \qquad Au = \lambda_k u + g_0(u) + h \tag{7.8}$$

admet une solution, alors pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I) \setminus \{0\}$ on a nécessairement :

$$\delta(h, \varphi) := \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \gamma_+\varphi^+(x)dx - \int_\Omega \gamma_-\varphi^-(x)dx \geq 0.$$

De plus si h est tel que $\delta(h, \varphi) > 0$ pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I) \setminus \{0\}$, alors l'équation (7.8) admet au moins une solution.

Démonstration. En notant $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, si u est solution de (7.8), en multipliant l'équation par $\varphi \in N(A - \lambda_k I)$, et en utilisant le fait que $A^* = A$ on a :

$$(u|A\varphi) = (Au|\varphi) = \lambda_k(u|\varphi) + \int_\Omega g_0(u(x))\varphi(x)dx + \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx,$$

ce qui, compte tenu du fait que $A\varphi = \lambda_k\varphi$, et en écrivant $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, donne :

$$0 = \int_\Omega g_0(u(x))\varphi^+(x)dx - \int_\Omega g_0(u(x))\varphi^-(x)dx + \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx$$
$$0 \leq \int_\Omega \gamma_+\varphi^+(x)dx - \int_\Omega \gamma_-\varphi^-(x)dx + \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx = \delta(h,\varphi),$$

où on utilise le fait que $\gamma_- \leq g(s) \leq \gamma_+$: on voit donc que la condition $\delta(h,\varphi) \geq 0$ est nécessaire.

Nous allons montrer maintenant que si h est telle que $\delta(h,\varphi) > 0$ pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I) \setminus \{0\}$, il existe une estimation *a priori* sur les solutions de (7.8). Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon]$ ne contienne aucune valeur propre de A ; on va montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $(u,t) \in D(A) \times [0,1]$ on a

$$Au = \lambda_k u + tg_0(u) + (1-t)\varepsilon u + h \Longrightarrow \|u\| < R. \tag{7.9}$$

En effet sinon il y aurait une suite $(u_n, t_n)_n$ telle que $\alpha_n := \|u_n\| \geq n$. En posant $v_n := u_n/\alpha_n$, on vérifie que

$$Av_n = (\lambda_k + (1-t_n)\varepsilon)v_n + g_0(\alpha_n v_n)/\alpha_n + h/\alpha_n, \tag{7.10}$$

et compte tenu de l'hypothèse sur g_0, on déduit que la suite Av_n est bornée dans $L^2(\Omega)$: cela signifie que $(v_n)_n$ est bornée dans $D(A)$ et par conséquent par un argument de compacité, *modulo* une extraction de sous-suite, on peut supposer que $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et p.p. sur Ω, et $t_n \to t \in [0,1]$. Par le théorème de la convergence dominée on vérifie facilement que $Av_n \to (\lambda_k + (1-t)\varepsilon)v$ dans $L^2(\Omega)$, et A étant fermé on conclut que $v \in D(A)$ et $Av = (\lambda_k + (1-t)\varepsilon)v$, avec $\|v\| = 1$. Cela signifie en particulier que $\lambda_k + (1-t)\varepsilon$ est valeur propre de A ; or par le choix de ε, la seule possibilité est d'avoir $t = 1$, ce qui implique que $v \in N(A - \lambda_k I)$. Maintenant en multipliant (7.10) par v au sens du produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et utilisant le fait que $A^* = A$ et $Av = \lambda_k v$, on voit que pour n assez grand on a :

$$t_n \int_\Omega g_0(\alpha_n v_n(x))v(x)dx + \int_\Omega h(x)v(x)dx \\ = -(1-t_n)\varepsilon \int_\Omega v_n(x)v(x)dx \leq 0.$$

Or on peut montrer facilement que

$$\int_\Omega g_0(\alpha_n v_n(x))v(x)dx \to \int_\Omega \left(\gamma_+ v^+(x) - \gamma_- v^-(x)\right) dx$$

lorsque $n \to \infty$, d'où on conclut finalement que $\delta(h,v) \leq 0$ contrairement à l'hypothèse. Ainsi on voit que l'estimation *a priori* (7.9) est vraie, et en posant

$$H(u,t) := (A - \beta I)^{-1}\left[(\lambda_k - \beta)u + tg_0(u) + (1-t)\varepsilon u + h\right],$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ est un élément de la résolvante $\rho(A)$, la résolution de l'équation (7.8) équivaut à trouver $u \in L^2(\Omega)$ tel que $u - H(u,t) = 0$. En utilisant le fait que H

est une homotopie compacte, l'invariance du degré topologique permet de voir que

$$\deg(I - H(\cdot, 1), B(0, R), 0) = \deg(I - H(\cdot, 0), B(0, R), 0) = \pm 1,$$

et ainsi de conclure la preuve de la proposition en utilisant le corollaire 6.3. □

7.4 Remarque. Dans la proposition 7.3 nous avons supposé que $\gamma_- \leq g_0(s) \leq \gamma_+$, ce qui a conduit à la condition $\delta(h, \varphi) > 0$ pour l'existence d'une solution. Dans le cas où on suppose que $\gamma_+ \leq g_0(s) \leq \gamma_-$, on peut montrer (cf. *Exercices*) que la condition suffisante (et *presque* nécessaire) pour l'existence d'une solution au problème (7.8) est en fait

$$\widetilde{\delta}(h, \varphi) := \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \gamma_- \varphi^+(x)dx - \int_\Omega \gamma_+ \varphi^-(x)dx > 0,$$

pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I) \setminus \{0\}$ (noter que $\widetilde{\delta}(h, \varphi) = -\delta(h, -\varphi)$).

Lorsque l'on ne suppose plus que g_0 est compris entre ses valeurs limites γ_- et γ_+ ou bien lorsque g_0 n'a pas de limite en $\pm\infty$ (comme dans le problème du pendule forcé, cf. *Exercices* du Chapitre **3**), la situation est beaucoup plus complexe et à notre connaissance le problème dans le cas général est ouvert. □

Exercices du chapitre 2

Exercice 1. En utilisant la proposition 3.4 montrer le résultat suivant :

> **Théorème de la boule chevelue.** *Si n est un entier impair, il n'existe pas, sur la sphère S^{n-1}, de champ tangent régulier ne s'annulant pas, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction T continue de $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $x \cdot Tx = 0$ pour tout $x \in S^{n-1}$.*

(Sinon, considérer : $H(x,t) := (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)\frac{Tx}{|Tx|}$).

Exercice 2. Montrer que la proposition 3.4 et le théorème de la boule chevelue sont faux si n est pair.

Exercice 3. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. On pose $h := g \circ f$, et on désigne par $(\omega_i)_i$ la famille des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. On désigne par $\deg(f, \Omega, \omega_i)$ le degré topologique de f dans Ω par rapport à un point quelconque de ω_i. Montrer que si $b \notin h(\partial\Omega)$, alors

$$\deg(h, \Omega, b) = \sum_i \deg(f, \Omega, \omega_i)\deg(g, \omega_i, b),$$

où la somme est en fait finie (c'est la formule de Leray pour la composition des fonctions).

Exercice 4. Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des ensembles mesurables et bornés de $\mathbb{R}^n$. On se propose de montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ divisant chacun des A_i en deux parties de même mesure. (Lorsque $n = 3$, c'est le problème du partage équitable d'un sandwich, où A_1 représente le pain, A_2 la mortadelle, A_3 les cornichons et H le couteau).

1) Pour $\sigma \in S^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $H(\sigma, t)$ l'hyperplan orthogonal à σ et de "hauteur" t, i.e. l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ (x|\sigma) = t\}$. Montrer qu'il existe $t_1 \leq t_2$ dépendant de σ tels que si $t < t_1$ ou $t > t_2$ alors

$$\text{mes}\,\{x \in A_1 \ ; \ (x|\sigma) < t\} \neq \text{mes}\,\{x \in A_1 \ ; \ (x|\sigma) > t\}\,.$$

2) On pose $t(\sigma) := (t_1 + t_2)/2$ où t_1, t_2 sont définis à la question précédente. Vérifier que $t(-\sigma) = -t(\sigma)$.

3) Pour $2 \leq k \leq n$, on pose $f_k(\sigma) := \mathrm{mes}\,\{x \in A_k\ ;\ (x|\sigma) > t(\sigma)\}$. Montrer que f_k est continu de S^{n-1} dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire si pour un $\sigma \in S^{n-1}$ on a $f_k(\sigma) = f_k(-\sigma)$?

4) En considérant la fonction $f := (f_2, \ldots, f_n)$ sur S^{n-1}, et en utilisant le théorème de Borsuk-Ulam (ou plutôt le corollaire 3.13), montrer qu'il existe $\sigma \in S^{n-1}$ tel que pour $1 \leq i \leq n$ l'hyperplan $H(\sigma, t(\sigma))$ divise tous les A_i en deux parties de même mesure.

Exercice 5. En reprenant les notations de la remarque 3.5, où on montre par un raisonnement par l'absurde que le théorème de la non-rétraction de la boule implique le théorème de point fixe de Brouwer, montrer que si $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ est continue et sans point fixe dans $\overline{B}$, pour tout $x \in \overline{B}$ il existe un unique $\lambda(x) > 0$ tel que $\varphi(x) := f(x) + \lambda(x)[x - f(x)] \in S^{N-1}$, et que $x \mapsto \lambda(x)$ est continue (on pourra expliciter $\lambda(x)$ en calculant le carré de la norme euclidienne de $\varphi(x)$). Montrer également que si $x \in S^{N-1}$ alors $\lambda(x) = 1$.

Exercice 6. Soient Ω un ouvert borné et symétrique de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, et $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ une fonction qui est impaire sur $\partial\Omega$. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in \overline{\Omega}$ tels que $f(x_0) = 0$ et $x_1 = f(x_1)$ (noter que f peut ne pas être impaire dans Ω).

Exercice 7. On sait que si $f \in C([-1, +1]; \mathbb{R})$, pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]-1, +1[$ il suffit de savoir que $f(-1)f(+1) < 0$. On peut se demander quelle est la condition analogue en dimension $n \geq 2$, i.e. lorsque $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $n \geq 2$, quel renseignement de f sur le bord S^{n-1} de la boule $B(0,1)$ permet de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $B(0,1)$. En fait, et cela est surprenant, la réponse est très simple : en supposant que pour $x \in S^{n-1}$ on a $f(x) \neq 0$, montrer que si pour tout $x \in S^{n-1}$ on a

$$\frac{f(x)}{|f(x)|} \neq \frac{f(-x)}{|f(-x)|}\ ,$$

alors il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $f(x_0) = 0$. (c'est la version générale du théorème de Borsuk, que l'on appelle en allemand l'*antipodensatz* (i.e. théorème des antipodes) : que si f ne pointe pas dans la même direction en deux points antipodaux, alors f s'annule dans la boule unité). Pour la démonstration, on pourra considérer l'homotopie $H(x,t) := (f(x) - tf(-x))\,/(1+t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Exercice 8. Soit K un convexe ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\overline{K}; \overline{K})$; on suppose que $0 \in K$.

1) Montrer que $\overline{K}$ est convexe et que si $x \in \overline{K}$ est tel que pour un $\lambda > 1$ on a $\lambda x \in \overline{K}$, alors $x \notin \partial K$.

2) Montrer que si f n'a pas de point fixe sur ∂K, alors pour tout $(x,t) \in \partial K \times [0,1]$ on a $x - tf(x) \neq 0$.

3) Montrer que toute fonction continue de $\overline{K}$ dans $\overline{K}$ admet un point fixe dans $\overline{K}$. (C'est la version générale du théorème de point fixe de Brouwer).

Exercice 9. Soient E un espace de Banach et $T \in C^1(E,E)$ un opérateur compact. Montrer que pour tout $u_0 \in E$, la dérivée $T'(u_0)$ est une application linéaire compacte de E dans E.

Exercice 10. Soient E un espace de Banach et T un opérateur compact et impair. Montrer que si Ω est un ouvert borné et symétrique de E, alors $\deg(I-T,\Omega,0)$ est un entier impair ou pair suivant que l'origine appartient à Ω, ou n'appartient pas à $\overline{\Omega}$ (c'est le théorème de Borsuk pour les perturbations compactes de l'identité en dimension infinie).

Exercice 11. Soient E un espace de Banach et T une application linéaire compacte de E dans E, et $\lambda \neq 0$ tel que λ^{-1} n'est pas valeur propre de T. Calculer, en fonction des valeurs propres λ_i de T qui sont supérieures à λ^{-1}, le degré $\deg(I-\lambda T, B(0,R),0)$.

Exercice 12. Soient $K : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \geq 1$ un réel. Pour $u \in C([0,1])$ on pose :

$$Tu(x) := \int_0^1 K(x,y)|u(y)|^{p-1}u(y)dy.$$

1) Montrer que T est un opérateur compact sur $C([0,1])$.

2) Montrer que T est de classe C^1 et calculer sa dérivée au sens de Fréchet.

3) On suppose que $K \geq 0$ et $K \not\equiv 0$ et que $R > 0$ est donné. Calculer, pour $f \in C([0,1])$ fixée, le degré $\deg(I-T,B(0,R),f)$.

Exercice 13. Quel est le genre de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ pour $n \geq 1$?

Exercice 14. Soit Ω un ouvert borné et symétrique d'un espace de Banach E (de dimension finie ou infinie), et contenant l'origine. Quel est le genre de Ω^c ?

Exercice 15. Soient K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et T une fonction continue de K dans $\mathbb{R}^N$.

1) En considérant la fonction $f(x) := P_{_K}(x-Tx)$, où $P_{_K}$ désigne la projection sur K (cf. Exercice 1 du Chapitre **1**), et en utilisant le théorème de point fixe de Brouwer, montrer le théorème de Hartman-Stampacchia

$$\exists u \in K,\ \forall v \in K, \quad (Tu|v-u) \geq 0.$$

2) Soient B la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\overline{B},\overline{B})$. Montrer le théorème de point fixe de Brouwer en utilisant le théorème de Hartman-Stampacchia (considérer $Tx = x - f(x)$; si $u \in \overline{B}$ est tel que pour tout $v \in \overline{B}$ on a $(Tu|v-u) \geq 0$, en distinguant les deux cas $u \in B$ et $u \in S^{n-1}$, montrer que $Tu = 0$. Pour le cas où $u \in S^{n-1}$, montrer d'abord qu'il existe $\lambda \leq 0$ tel que $Tu = \lambda u$, puis montrer que $\lambda = 0$).

Exercice 16. Soient $n \geq 1$ un entier et f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $R > 0$ et un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \text{si}\ \ |x| = R\ \ \text{alors}\ \ (f(x)|x) \geq 0\,.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $|x_0| \leq R$ tel que $f(x_0) = 0$ (sinon considérer la fonction $\varphi(x) := -Rf(x)/|f(x)|$ dans la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ et appliquer le théorème de point fixe de Brouwer).

Exercice 17. Soit $F \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ une fonction localement lipschitzienne. On suppose que l'origine est asymptotiquement stable pour le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x)\ , \\ x(0) = x_0\ , \end{cases}$$

i.e. qu'il existe $R > 0$ tel que si $|x_0| \leq R$, la solution partant de x_0 existe pour tout $t \geq 0$, que $\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0$, et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x_0| \leq \delta$ on a $|x(t,x_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

En considérant, pour $0 < \theta \leq 1$, l'homotopie

$$H(\theta, x_0) := \frac{x(\theta/(1-\theta), x_0) - x_0}{\theta},$$

montrer que $H(0,x_0) = F(x_0)$ et que pour $\rho > 0$ assez petit on a

$$\deg\left(F, B(0,\rho), 0\right) = (-1)^n.$$

Exercice 18. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $g_0 \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction telle que les limites

$$\gamma_\pm := \lim_{s\to\pm\infty} g_0(s)$$

existent et $g_0(0) = 0$. On suppose que $(v_n)_n$ est une suite de $L^2(\Omega)$ qui converge vers $v \in L^2(\Omega)$ et que $v \neq 0$. Montrer que si $(\alpha_n)_n$ est une suite telle que $\alpha_n \to +\infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_0(\alpha_n v_n(x))dx = \int_\Omega \left(\gamma_+ v^+(x) - \gamma_- v^-(x)\right) dx\ .$$

Exercice 19. En reprenant les notations de la proposition 7.3, on suppose que

$$\gamma_+ \leq g_0(s) \leq \gamma_-\ .$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire sur h pour que l'équation (7.8) admette une solution est que pour tout $\varphi \in N(A - \lambda_k I)$ on ait :

$$\widetilde{\delta}(h,\varphi) := \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \gamma_-\varphi^+(x)dx - \int_\Omega \gamma_+\varphi^-(x)dx \geq 0.$$

2) Montrer que si $\widetilde{\delta}(h,\varphi) > 0$ pour $\varphi \in N(A-\lambda_k I)\backslash\{0\}$, alors l'équation (7.8) admet au moins une solution (on pourra prendre $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k[$ ne contienne aucune valeur propre de A et pour $0 \leq t \leq 1$ trouver une estimation *a priori* des solutions de $Au = \lambda_k u + tg_0(u) - (1-t)\varepsilon u + h$).

3 Points critiques sans contrainte

1. Fonctionnelles minorées

Si K est un espace topologique, rappelons qu'une fonction J de K dans $\mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[J \leq \lambda] := \{x \in K \,;\, J(x) \leq \lambda\}$ est fermé. On dit que J est semi-continue supérieurement (en abrégé s.c.s.) si $-J$ est s.c.i. Introduisons la définition suivante :

1.1 Définition. *Soient X un espace de Banach et ω une partie de X. Une fonction $J : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* **faiblement séquentiellement s.c.i.** *si pour toute suite $(x_n)_n$ de ω convergeant faiblement vers $x \in \omega$ on a $J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n)$.*

On peut montrer que, dans les espaces de Banach réflexifs, les fonctions faiblement séquentiellement s.c.i. atteignent leur minimum, pourvu qu'elles tendent vers $+\infty$ à l'infini.

1.2 Proposition. *Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $\|x_n\| \to \infty$, on a $J(x_n) \to +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e.*

$$\exists u \in K, \quad J(u) = \inf_{v\in K} J(v) = \min_{v\in K} J(v).$$

Démonstration. En effet si $\alpha := \inf_{v\in K} J(v)$ et $(u_n)_n$ est une suite minimisante, du fait que J tend vers l'infini à l'infini, $(u_n)_n$ est bornée. Comme X est réflexif, il existe une sous-suite $(u_{n_i})_i$ et $u \in X$ tels que $u_{n_i} \rightharpoonup u$ dans X-faible ; K étant un convexe fermé, il est faiblement fermé et $u \in K$. Finalement :

$$\alpha \leq J(u) \leq \liminf_{i\to\infty} J(u_{n_i}) = \alpha,$$

car J est faiblement séquentiellement s.c.i. Ainsi $\alpha = J(u) \in \mathbb{R}$ et J atteint son minimum en $u \in K$. □

1.3 Lemme. *Soient X un espace de Banach, K un convexe fermé de X et J une fonction convexe s.c.i. de K dans $\mathbb{R}$. Alors J est faiblement s.c.i.*

Démonstration. Comme J est convexe s.c.i., pour $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[J \leq \lambda]$ est convexe et fermé : la proposition **1.**15.2 montre alors que $[J \leq \lambda]$ est faiblement fermé et par conséquent J est faiblement s.c.i. □

1.4 Corollaire. *Soient X un espace de Banach réflexif, K un convexe fermé de X et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe s.c.i. Si K est non-borné, supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $\|x_n\| \to \infty$, lorsque $n \to \infty$, on a $J(x_n) \to +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum sur K :*

$$\exists u \in K, \qquad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

De plus si J est strictement convexe, u est unique.

Démonstration. En utilisant le lemme 1.3 et la proposition 1.2, on conclut que J atteint son minimum en un point $u \in K$.

Si de plus J est strictement convexe et $u_0 \in K$ vérifie $J(u_0) = \alpha := J(u)$, on remarque que si $u \neq u_0$ on aurait

$$\alpha \leq J\left(\frac{u+u_0}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(u) + J(u_0)) = \alpha,$$

ce qui établit l'unicité du point de minimum. □

1.5 Remarque. Comme on le verra plus loin sur un exemple, souvent dans les applications, lorsqu'il s'agit de minimiser une fonctionnelle *non convexe* J définie sur un convexe fermé K d'un espace de Banach, on essaie de la décomposer sous la forme $J = J_1 + J_2$ où J_1 est convexe s.c.i. et J_2 est dans un certain sens *contrôlée* ou *dominée* par J_1, et on regarde si J_2 est faiblement séquentiellement s.c.i. □

Une caractérisation utile du point $u \in K$, où une fonction convexe J atteint son minimum, est contenue dans la proposition suivante.

1.6 Proposition. *Soient $K \subset X$ un convexe et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe G-dérivable en tout point de K. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *$u \in K$, et pour tout $v \in K$ on a $J(u) \leq J(v)$;*
(ii) *$u \in K$, et pour tout $v \in K$ on a $\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0$.*
Si de plus pour tous $v, w \in K$, $\tau \mapsto J'(v+\tau(w-v))$ est continue sur [0,1], alors les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes à :
(iii) *$u \in K$, et pour tout $v \in K$ on a $\langle J'(v), v-u\rangle \geq 0$.*

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Comme u réalise le minimum de J sur K, pour $0 < \tau < 1$ on a : $0 \leq J(u+\tau(v-u)) - J(u)$, ce qui, en divisant par $\tau > 0$ et faisant tendre τ vers zéro, donne (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (i) : D'après le lemme **1.**15.3 (ii), on a

$$J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v - u\rangle \geq 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : On a, d'après le Lemme **1.**15.3 (iii),

$$\langle J'(v), v - u\rangle \geq \langle J'(u), v - u\rangle \geq 0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Pour $0 < \tau < 1$ on a

$$\langle J'(u + \tau(v - u)), (u + \tau(v - u)) - u\rangle \geq 0,$$

ce qui, en divisant par τ, le faisant tendre vers zéro et en utilisant la continuité de J' sur les demi-droites (c'est ce qu'on appelle l'*hémicontinuité* de J') donne (ii). □

1.7 Remarque. Sous les hypothèses ci-dessus, lorsque K est un sous-espace vectoriel de X, en choisissant $v := u + tw$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $w \in K$ dans la caractérisation (ii), on voit que $\langle J'(u), w\rangle = 0$ pour tout $w \in K$, c'est-à-dire que $J'(u) \in K^{\perp} \subset X'$. En particulier si $K = X$, on a $J'(u) = 0$; si de plus J est strictement convexe, on sait donc que u est la seule solution de l'équation $J'(v) = 0$. □

1.8 Remarque. Lorsque l'on traite les problèmes variationnels sur les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, il existe un lien très fort entre les fonctionnelles faiblement séquentiellement s.c.i. et les fonctionnelles convexes. Soient $N \geq 1$ un entier et Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$. Considérons une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ et un convexe fermé K de $W^{1,p}(\Omega)$, par exemple pour $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ donnée :

$$K := \left\{ v \ ; \ v \in W^{1,p}(\Omega), \quad v = \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega \right\}.$$

Alors si $J(v) := \int_{\Omega} F(x, \nabla v(x))dx$, et si F vérifie une condition de croissance du type :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. sur } \Omega, \quad -C_1 + C_2|\xi|^p \leq F(x, \xi) \leq C_3(1 + |\xi|^p),$$

on peut voir facilement que J est minorée sur $W^{1,p}(\Omega)$ et que toute suite minimisante $(u_n)_n$ de K telle que $J(u_n) \to \inf_{v \in K} J(v)$, est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Ce qui est remarquable c'est que J est faiblement séquentiellement s.c.i. si, et seulement si, pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\xi \mapsto F(x, \xi)$ est *convexe* sur $\mathbb{R}^N$ (pour une démonstration de ce résultat dans un cas simple voir *Exercices*). Différentes versions de ce résultat sont connues depuis notamment L. Tonelli [161], J. Serrin [149], mais la version générale suivante est due à P. Marcellini & C. Sbordone [109] :

1.9 Théorème. *Soient $1 \leq p \leq \infty$, Ω un ouvert borné de classe C^1 et g une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\sigma \mapsto g(x, \sigma, \tau)$ et $\tau \mapsto g(x, \sigma, \tau)$ soient croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $g(\cdot, \sigma, \tau)$ est dans $L^1(\Omega)$ pour (σ, τ) fixé. On considère une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, mesurable en $x \in \Omega$ et continue en $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. On suppose que :*

$$\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad 0 \leq F(x, s, \xi) \leq g(x, |s|, |\xi|),$$

et on pose $J(v) := \int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))dx$, *pour* $v \in W^{1,p}(\Omega)$. *Alors* J *est faiblement séquentiellement s.c.i. si, et seulement si, la fonction* $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}^N$.

(Comme toujours, lorsque $p = \infty$, la notion de *faible* est remplacée par celle de *faible-*$*$, c'est à dire que la dualité est celle de $L^\infty(\Omega)$–$L^1(\Omega)$). On peut également étudier des fonctionnelles J définies sur l'espace $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^m$ pour un entier $m \geq 2$. En effet si $\mathfrak{M}_{m,N}$ désigne l'ensemble des matrices réelles à m lignes et N colonnes, et $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N} \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction, on pose pour $v \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^m$:

$$J(v) := \int_\Omega F(x, v(x), Dv(x)),$$

où Dv désigne la matrice des dérivées $\partial_j v_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq N$. Dans beaucoup d'applications venant des problèmes de la mécanique (problèmes de visco-élasticité notamment) la fonction F n'est pas convexe, et cependant on s'intéresse à minimiser J sur un ensemble

$$K := \left\{ v \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^m \ ; \ v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

(avec cette fois $\varphi \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^m$). La bonne notion dans ce cadre est ce qu'on appelle la quasi-convexité de F : on dit que $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est *quasi-convexe* (en $M \in \mathfrak{M}_{m,N}$) si pour tous $(x, \xi, M) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N}$ on a :

$$\forall v \in (C_c^\infty(\Omega))^m, \quad F(x, \xi, M) \operatorname{mes}(\Omega) \leq \int_\Omega F(x, \xi, M + Dv(y))dy.$$

On peut montrer qu'une fonction convexe est quasi-convexe en $M \in \mathfrak{M}_{m,N}$. Bien que cette condition ne soit pas facile à manier elle apparaît de façon naturelle dans beaucoup de problèmes, et dans le cas où $m = 1$ elle est équivalente à la convexité en M. Lorsque $F(x, \xi, M) := F(M)$ satisfait une condition de croissance du type $-C_1 + C_2|M|^p \leq F(x, \xi, M) \leq C_3(1 + |M|^p)$, où $|M|$ désigne une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_{m,N}$, un résultat dû à C.B. Morrey [118], affirme que J est faiblement séquentiellement s.c.i. si, et seulement si, F est quasi-convexe (voir aussi C.B. Morrey [119] pour plus de détail sur la quasi-convexité). Une généralisation de ce résultat, qui est l'analogue du théorème 1.9, est due à E. Acerbi & N. Fusco [1], et nous la citons ici :

1.10 Théorème. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* F *une fonction de* $\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *mesurable en* $x \in \Omega$, *continue en* $(\xi, M) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N}$. *On suppose qu'il existe* $a \in L^1(\Omega)$ *et une constante* $C > 0$ *telle que p.p. sur* Ω *et pour tout* $(\xi, M) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{M}_{m,N}$ *on ait :*

$$0 \leq F(x, \xi, M) \leq a(x) + C\left(|\xi|^p + |M|^p\right).$$

Alors la fonctionnelle J, *définie par* $J(v) := \int_\Omega F(x, v(x), Dv(x))dx$, *est faiblement séquentiellement s.c.i. sur* $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^m$ *si, et seulement si,* $M \mapsto F(x, \xi, M)$ *est quasi-convexe.*

Au paragraphe suivant nous allons étudier sur des exemples concrets venant des équations aux dérivées partielles, comment on peut appliquer les résultats que l'on vient de voir.

2. Exemples d'application

Dans tout ce qui suit on suppose que Ω est un ouvert *borné et régulier* de $\mathbb{R}^N$ et que $a(x) := (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ est une matrice symétrique à éléments dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition de coercivité uniforme

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad (a(x)\xi|\xi) = a(x)\xi\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2, \tag{2.1}$$

avec $\alpha > 0$ (cf. le lemme **1.**9.1). On considère alors l'opérateur elliptique

$$\begin{cases} Au := -\mathrm{div}(a(\cdot)\nabla u) \\ D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ Au \in L^2(\Omega)\right\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous avons vu au paragraphe § **1.**9 que $(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$. Sur un exemple simple, nous allons voir le type de méthodes que l'on peut employer pour résoudre des équations semilinéaires.

2.1 Exemple. Soit $g : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $s \in \mathbb{R}$ mesurable en $x \in \Omega$ (au sens de (**1.**16.1)). On suppose que $g(x,\cdot)$ est une fonction croissante, p.p. en $x \in \Omega$, et (sans perte de généralité) que $g(\cdot, 0) = 0$. On s'intéresse à la résolution de l'équation semilinéaire :

$$\begin{cases} Au + g(\cdot,u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

On pose $G(x,s) := \int_0^s g(x,t)dt$ et on introduit l'*énergie* associée à l'équation (2.3) :

$$E(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x) + G(x,v(x)) - f(x)v(x)\right]dx. \tag{2.4}$$

Condidérons d'abord le cas où $g(x,s) := |s|^{p-1}s$ avec $p \ge 1$. Alors on peut facilement vérifier que E est une fonction strictement convexe de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ pourvu que, par exemple, pour un réel $q \ge \max(1, \frac{2N}{N+2})$, la donnée f soit dans $L^q(\Omega)$. Dans ces conditions $L^q(\Omega)$ est contenu dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$), donc dans $H^{-1}(\Omega) + L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$). Par ailleurs en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev (**1.**8.8), on sait que

$$\int_\Omega |f(x)v(x)|dx \le \|f\|_q\,\|v\|_{q'} \le C\,\|f\|_q\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

pour une certaine constante C ; on en déduit l'estimation inférieure (toujours dans le cas simple où $g(x,s) = |s|^{p-1}s$) :

$$E(v) \geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx - C\|f\|_q \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Cela montre que si $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v_n\|_{p+1}$ tend vers l'infini, alors $E(v_n) \to +\infty$. Par conséquent le corollaire 1.4 montre que E atteint son minimum sur $H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ en un unique point u, et on a :

$$E'(u) = Au + |u|^{p-1}u - f = 0 \qquad \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Comme par ailleurs $u = 0$ sur $\partial\Omega$ au sens des traces, on obtient ainsi une solution (faible) de (2.3) dans le cas particulier où $g(x,s) := |s|^{p-1}s$. Cependant en reprenant l'idée de la démonstration de la proposition 1.2 on peut montrer l'existence d'une solution unique de l'équation (2.3) dans un cadre plus général.

2.2 Proposition. *Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable en $x \in \Omega$, continue et croissante en $s \in \mathbb{R}$. On suppose que $g(\cdot,0) = 0$, et que $G(x,s) := \int_0^s g(x,\sigma)d\sigma$ est telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $G(\cdot,s) \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. Pour $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq \frac{2N}{N+2}$ si $N \geq 3$, $q > 1$ si $N = 2$ et $q \geq 1$ si $N = 1$, on considère l'ensemble :*

$$K_0 := \left\{ v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ G(\cdot, v(\cdot)) \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Alors E est strictement convexe sur K_0 et atteint son minimum en $u \in K_0$.

Démonstration. Comme $s \mapsto g(x,s)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et $g(x,0) = 0$, la fonction $s \mapsto G(x,s)$ est convexe et positive : par conséquent K_0 est convexe, et non vide parce que $\mathscr{D}(\Omega) \subset K_0$; de la même façon il est clair que sur K_0, l'énergie E est strictement convexe. D'autre part pour voir que E est bornée inférieurement sur K_0, en utilisant comme ci-dessus les inégalités de Hölder et de Sobolev et le fait que $G(x,s) \geq 0$, il suffit de remarquer que l'on a :

$$E(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\,\|f\|_q\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \frac{-1}{2\alpha}\,C^2\|f\|_q^2. \tag{2.5}$$

Soit maintenant $\mu := \inf_{v\in K_0} E(v)$. Si $(u_n)_n$ est une suite de K_0 telle que $E(u_n) \leq 1 + \mu$, et $E(u_n) \to \mu$ on déduit de (2.5) que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite, notée encore $(u_n)_n$, telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible et même dans $L^2(\Omega)$ et p.p. sur Ω, grâce au théorème de Rellich-Kondrachov **1.**8.16 et à la propsosition **1.**4.11. Si $M := \sup_{n\geq 1}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$, on a ainsi par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega G(x,u(x))dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega G(x,u_n(x))dx \leq 1 + \mu + CM\,\|f\|_q,$$

ce qui prouve que $u \in K_0$. Finalement sachant que les termes quadratique et linéaire intervenant dans E sont convexes et continus sur $H_0^1(\Omega)$, on conclut que $E(u) \leq \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \mu$, c'est à dire que μ est atteint en u. □

2.3 Remarque. On peut montrer que u est solution faible de (2.3) si $g(x,\cdot)$ vérifie une condition de croissance supplémentaire du type polynômial, par exemple (voir *Exercices*). Noter qu'ici K_0 n'est pas fermé dans $H_0^1(\Omega)$ et que l'on

ne montre pas que E est s.c.i. : on montre que K_0 contient la limite de toute suite minimisante, et qu'au point de minimum E est s.c.i. ; on n'a pas besoin d'autre chose pour montrer que E atteint son minimum, mais néanmoins on peut montrer, en suivant exactement la même démarche, que E est faiblement séquentiellement s.c.i.

On notera également que la donnée f pourrait être dans d'autres espaces que $L^q(\Omega)$ avec $q \geq \max(1, \frac{2N}{N+2})$, pourvu que l'on précise un peu plus la croissance de $G(x,s)$. □

2.4 Remarque. Dans un grand nombre de situations où la fonctionnelle à minimiser est *uniformément* strictement convexe, on peut montrer que la convergence faible de la suite minimisante implique sa convergence forte, ce qui est particulièrement intéressant si l'on veut calculer par un algorithme de minimisation le point de minimum. Pour être plus précis, supposons que $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe s.c.i. et G-dérivable telle que :

$$J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u\rangle + \delta\|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\ , \tag{2.6}$$

pour un certain $\delta > 0$ et tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$ (ici $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$). Alors J est bornée inférieurement et coercive (i.e. $J(v) \to +\infty$ si $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$), et on conclut qu'il existe une suite minimisante $(u_n)_n$ telle que $J(u_n) \to \mu := \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)$ et que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible, avec $J(u) = \mu$.

Pour voir que $\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}$ tend vers zéro, il suffit d'appliquer l'inégalité (2.6) à $v := u_n$ pour obtenir :

$$J(u_n) - J(u) \geq \langle J'(u), u_n - u\rangle + \delta\|u_n - u\|^2,$$

et puisque $J(u_n) - J(u)$ tend vers zéro et que $u_n - u \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible, on déduit que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (fort) : par conséquent toute suite minimisante converge fortement vers u. On notera également que pour la validité de ce raisonnement, il suffit que la condition d'uniforme convexité (2.6) soit vraie lorsque u est le point de minimum et v appartient à un borné de $H_0^1(\Omega)$. Très souvent pour montrer qu'une fonction J vérifie une condition du type (2.6), en supposant qu'elle soit deux fois G-dérivable, on essaie de montrer que la dérivée seconde $J''(v)$ satisfait une condition du type :

$$J''(v)[\varphi,\varphi] \geq 2\delta\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

puis en considérant la fonction $t \mapsto J(u + t(v-u))$ définie sur $[0,1]$, on établit (2.6). Par exemple si

$$J(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x) + \frac{1}{p+1}|v(x)|^{p+1} - f(x)v(x)\right] dx,$$

on peut voir facilement que $\alpha > 0$ étant la constante de coercivité uniforme de la matrice $a(x)$, on a :

$$J''(v)[\varphi,\varphi] = \int_\Omega \left[a(x)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\varphi(x) + p|v(x)|^{p-1}\varphi(x)^2\right]dx$$
$$\geq \alpha\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

(pour éviter les difficultés, supposer ici que $(N-2)p \leq N+2$ et $p \geq 1$). On en conclut que J vérifie pour tous $u, v \in H^1_0(\Omega)$:

$$J(v) \geq J(u) + \langle Au + |u|^{p-1} - f, v-u\rangle + \frac{\alpha}{2}\|\nabla v - \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier lorsque u est le point de minimum de J on a $Au + |u|^{p-1}u = f$, et ainsi on déduit de cette inégalité que toute suite minimisante $(u_n)_n$ vérifie

$$\alpha\|\nabla u - \nabla u_n\|^2 \leq 2\left[J(u_n) - J(u)\right] \to 0,$$

c'est à dire que u_n converge fortement dans $H^1_0(\Omega)$ vers u. Pour le cas général où p est quelconque voir *Exercices*. □

2.5 Exemple. Soient $a, b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $q > 1$ donnés et Ω un ouvert borné régulier. On cherche à résoudre, pour une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fixée (dont on précisera les propriétés), l'équation

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + a|u|^{q-1}u = \lambda u + b|u|^{p-1}u + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans un premier temps on associe à cette équation la fonctionnelle d'énergie :

$$\text{(2.8)} \qquad E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{a}{q+1}\|v\|^{q+1}_{q+1} - \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 - \frac{b}{p+1}\|v\|^{p+1}_{p+1} - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

On rappelle que si $N \geq 3$, on a posé $2^* := \frac{2N}{N-2}$; on conviendra ici que si $N = 2$, 2^* désigne n'importe quel réel de $[1, +\infty[$, et que si $N = 1$, $2^* := \infty$. On peut vérifier facilement que si $r := \max(p+1, q+1, 2^*)$ et $f \in L^{r'}(\Omega)$ (où $r' := r/(r-1)$) alors E est de classe C^1 sur l'espace $X := H^1_0(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et que pour $v \in X$ on a :

$$E'(v) = -\Delta v + a|v|^{q-1}v - \lambda v - b|v|^{p-1}v - f.$$

En particulier un point critique de E est une solution faible de l'équation (2.7), la condition aux limites étant satisfaite comme toujours au sens des traces.

2.6 Lemme. *Soient $a > 0, b > 0$, $1 < p < q$ et E défini par (2.8). Alors si $r := \max(q+1, 2^*)$, $X := H^1_0(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et $f \in L^{r'}(\Omega)$, on a l'estimation inférieure*

$$\text{(2.9)} \qquad E(v) \geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{a}{q+1}\|v\|^{q+1}_{q+1} - C_1\|v\|^2_{q+1} - C_2\|v\|^{p+1}_{q+1} - \|f\|_{r'}\|v\|_r$$

où $C_1, C_2 \geq 0$ dépendent uniquement de λ, b, p, q et de Ω (en fait $C_1 = 0$ si $\lambda \leq 0$). En particulier $\inf\{E(v)\ ;\ v \in X\} > -\infty$.

Démonstration. On peut commencer par minorer le terme de degré 1 de E, i.e. $-\int_\Omega f(x)v(x)dx \geq -\|f\|_{r'}\,\|v\|_r$. Ensuite, si on a $\lambda \leq 0$, on minore le terme faisant intervenir $\|v\|_2^2$ par 0. Sinon il suffit de remarquer que, Ω étant borné, on a $L^2(\Omega) + L^{p+1}(\Omega) \supset L^{q+1}(\Omega)$ et par conséquent

$$\Big|\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v(x)|^2 dx - \frac{b}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx\Big| \leq C_1\|v\|_{q+1}^2 + C_2\|v\|_{q+1}^{p+1}.$$

Ce qui donne l'estimation inférieure (2.9). Comme le membre de droite de l'inégalité (2.9) est borné sur les bornés de X et que

$$\frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{a}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} - C_1\|v\|_{q+1}^2 - C_2\|v\|_{q+1}^{p+1} - \|f\|_{r'}\,\|v\|_r$$

tend vers $+\infty$ lorsque $\|v\| \to \infty$, on déduit que E est bornée inférieurement (rappelons que la norme sur X est donnée par $\|v\|_X := \|\nabla v\|_2 + \|v\|_r$). □

On peut appliquer maintenant la proposition 1.2 pour montrer que le problème (2.7) admet (au moins) une solution.

2.7 Proposition. *Soient $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $1 < p < q$. Alors, si $r := \max(q+1, 2^*)$, pour tout $f \in L^{r'}(\Omega)$ l'équation (2.7) admet au moins une solution faible, obtenue comme le point où E atteint son minimum.*

Démonstration. Posons $J_1(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{a}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1}$ et $J_2 := E - J_1$. Il est clair que J_1 est une fonction convexe et continue de $X \longrightarrow \mathbb{R}$, et par conséquent faiblement s.c.i. Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite convergeant faiblement vers u dans X, alors $J_2(u_n)$ converge vers $J_2(u)$. En effet, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, l'injection de X dans $L^m(\Omega)$ est compacte pour tout m vérifiant $1 \leq m < q+1$. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ converge fortement dans $L^m(\Omega)$ pour $m = 2$ et $m = p+1$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} J_2(u_n) = J(u).$$

On en déduit que E est faiblement séquentiellement s.c.i. sur X et, en utilisant l'estimation (2.9) ainsi que la proposition 1.2, on conclut que E atteint son minimum sur X. □

2.8 Remarque. Il faut retenir de cette étude que

- nous avons pu décomposer E en la somme de deux fonctionnelles J_1 et J_2, la première étant convexe continue et la deuxième faiblement séquentiellement continue ;
- nous avons utilisé le fait que la croissance de J_1 est plus rapide que celle de J_2 ;
- nous avons utilisé le théorème de Rellich-Kondrachov sur la compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

On peut résoudre de la même façon des équations plus générales où le laplacien est remplacé par un opérateur auto-adjoint elliptique du second ordre et la fonction $a|s|^{q-1} - b|s|^{p-1}$ par une fonction $g(x, s)$ ayant des propriétés semblables. □

2.9 Remarque. On vérifiera sans difficulté que, si dans la proposition précédente on suppose $p > q$, alors $\inf_{v\in X} E(v) = -\infty$ (considérer, pour un élément $v \neq 0$, la fonction $t \mapsto E(tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). De même on a toujours $\sup_{v\in X} E(v) = +\infty$. Nous verrons ce dernier point plus loin, mais en prenant l'exemple simple de la dimension $N = 1$ où $\Omega :=]0, \pi[$ et en posant $\varphi_k(x) := \sin(kx)$, on peut voir tout de suite que $\lim_{k\to\infty} E(\varphi_k) = +\infty$. Lorsque $p > q$, il faudra donc utiliser des méthodes différentes pour trouver des points critiques. □

Avant de considérer des équations semilinéaires un peu plus générales montrons un résultat d'unicité. Rappelons l'inégalité de Poincaré (voir proposition **1.**8.18 et remarque **1.**8.19) : pour $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $\lambda_1 \|v\|_2^2 \leq \|\nabla v\|_2^2$ où

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \|\nabla v\|_2^2 \, ; v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_2^2 = 1 \right\} \geq 0$$

et, lorsque $\lambda_1 > 0$ est atteint par une fonction φ_1 (ce qui est le cas si Ω est borné), alors λ_1 est la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans Ω.

2.10 Lemme. *On suppose que $b = 0$, $a > 0$ et $\lambda \leq \lambda_1$. Alors, si $r = \max(q + 1, 2^*)$, pour tout $f \in L^{r'}(\Omega)$ l'équation (2.7) admet une solution unique.*

Démonstration. Comme $\lambda \leq \lambda_1$, la forme bilinéaire

$$(u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

est semi-définie positive sur $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent

$$v \mapsto \|\nabla v\|_2^2 - \lambda \|v\|_2^2$$

est convexe (cf. *Exercices*) et E est strictement convexe. On en déduit que E admet un unique point critique et que la solution de (2.7) est unique. □

Pour voir que la condition $\lambda \leq \lambda_1$ est indispensable pour avoir l'unicité de la solution de (2.7), montrons le résultat suivant.

2.11 Proposition. *Soit Ω un ouvert borné. On suppose que $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\lambda > \lambda_1$ et $f = 0$. Alors pour tout $q > p > 1$ l'équation (2.7) admet au moins une solution positive $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ (il y a donc au moins trois solutions : $0, u$ et $-u$).*

Démonstration. On sait déjà qu'une solution u de (2.7) peut être obtenue comme le point $u \in X := H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ où on a $E(u) = \alpha := \inf_{v\in X} E(v)$. Notons que, dans la procédure de minimisation, on peut remplacer u_n par $|u_n|$; en effet, si $E(u_n) \to \alpha$, alors (voir proposition **1.**8.22) on a aussi $|u_n| \in X$ et $E(|u_n|) \leq E(u_n)$, i.e. $E(|u_n|) \to \alpha$. On peut donc supposer que la suite

minimisante vérifie $u_n \geq 0$ et que $u \geq 0$ (ici on utilise le fait que si $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, alors une sous-suite converge presque partout vers u). Si on montre que $\alpha \neq 0$, alors on aura $u \not\equiv 0$. Or on sait qu'il existe $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad \|\varphi_1\|_2^2 = 1, \quad \|\nabla\varphi_1\|_2^2 = \lambda_1.$$

Si $t > 0$ on a

$$E(t\varphi_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda)t^2}{2\lambda_1} + at^{q+1}\|\varphi_1\|_{q+1}^{q+1} - bt^{p+1}\|\varphi_1\|_{p+1}^{p+1},$$

et par conséquent, puisque $\lambda > \lambda_1$ et que $q + 1 > p + 1 > 2$, si $t > 0$ est assez petit on a $E(t\varphi_1) < 0$ et $\alpha < 0$. □

3. Le théorème de Ky Fan-von Neumann

Nous avons vu jusqu'à présent des fonctions bornées inférieurement qui atteignent leur minimum. L'exemple fondamental (et le plus simple) de telles fonctions est celui des fonctions convexes. En ce qui concerne les fonctions qui ne sont bornées ni inférieurement ni supérieurement, on dispose du théorème de Ky Fan-von Neumann, qui est l'analogue du corollaire 1.4 pour la classe des fonctions qui sont *convexes-concaves*. Voici d'abord la définition d'un *point-selle*. Pour une étude plus approfondie de ce type de fonctionnelles, ainsi que des exemples d'application à la résoltion de problèmes non-linéaires, voir H. Brezis [27], I. Ekeland & R. Temam [60] et R.T. Rockafellar [143].

3.1 Définition. *Soient A et B deux ensembles et $L : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit qu'un point $(x_*, y_*) \in A \times B$ est un* **point-selle** *de L sur $A \times B$ si*

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad L(x_*, y) \leq L(x_*, y_*) \leq L(x, y_*).$$

Par exemple si $A = B := \mathbb{R}$ et $L(x, y) := x^2 - y^2$, le point $(0, 0)$ est un point-selle de L sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une fonction quelconque définie sur un ensemble $A \times B$ n'admet pas nécessairement de point-selle, même si elle est continue et A et B sont compacts. En fait on a la caractérisation suivante d'un point-selle :

3.2 Lemme. *Soient A, B deux ensembles et $L : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *L admet un point-selle sur $A \times B$.*

(ii) *On a l'égalité* $\max\limits_{y\in B} \inf\limits_{x\in A} L(x, y) = \min\limits_{x\in A} \sup\limits_{y\in B} L(x, y)$.

Démonstration. Pour montrer que (i) implique (ii), notons avant toute chose que l'on a toujours de façon évidente :

$$\sup_{y\in B} \inf_{x\in A} L(x, y) \leq \inf_{x\in A} \sup_{y\in B} L(x, y).$$

Il nous faut donc montrer l'inégalité inverse. Soit $(x_*, y_*) \in A \times B$ un point-selle de L. On a ainsi

$$\sup_{y\in B} L(x_*, y) = L(x_*, y_*) = \inf_{x\in A} L(x, y_*).$$

Mais comme

$$\inf_{x\in A}\sup_{y\in B} L(x, y) \le \sup_{y\in B} L(x_*, y) = \inf_{x\in A} L(x, y_*) \le \sup_{y\in B}\inf_{x\in A} L(x, y),$$

on en conclut que ces inégalités sont des égalités et que

$$\sup_{y\in B}\inf_{x\in A} L(x, y) = \inf_{x\in A}\sup_{y\in B} L(x, y) = L(x_*, y_*).$$

Par ailleurs comme

$$L(x_*, y_*) = \sup_{y\in B} L(x_*, y) = \min_{x\in A}\sup_{y\in B} L(x, y)$$

et, de même, $L(x_*, y_*) = \inf_{x\in A} L(x, y_*) = \max_{y\in B}\inf_{x\in A} L(x, y)$, (ii) est vérifiée.

Pour montrer que (ii) implique (i), on définit $x_* \in A$ et $y_* \in B$ par

$$\sup_{y\in B} L(x_*, y) = \min_{x\in A}\sup_{y\in B} L(x, y) =: m$$
$$\inf_{x\in A} L(x, y_*) = \max_{y\in B}\inf_{x\in A} L(x, y) = m\,.$$

Comme $L(x_*, y_*) \le \sup_{y\in B} L(x_*, y) = m$ et

$$m = \inf_{x\in A} L(x, y_*) \le L(x_*, y_*)\,,$$

on en conclut que $m = L(x_*, y_*)$. On a donc pour tous $x \in A$ et $y \in B$

$$L(x_*, y) \le L(x_*, y_*) \le L(x, y_*),$$

c'est-à-dire que (x_*, y_*) est un point-selle de L sur $A \times B$. □

3.3 Remarque. Il est clair qu'il existe des fonctions sans point-selle. Par exemple, considérons la fonction

$$L(x, y) := \sin(x + y),$$

avec $A = B := [0, 2\pi]$. On a alors

$$\sup_{y\in B}\inf_{x\in A} L(x, y) = -1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in A}\sup_{y\in B} L(x, y) = +1.$$ □

On va maintenant montrer le théorème de Ky Fan-von Neumann sur l'existence de points-selles pour des fonctions convexe-concave.

3.4 Théorème de min-max de Ky Fan-von Neumann. *Soient X, Y deux espaces de Banach réflexifs, $K_1 \subset X$ et $K_2 \subset Y$ deux convexes fermés. On suppose que $L : K_1 \times K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe-concave, i.e.*
• *pour tout $x \in K_1$, l'application $L(x, \cdot)$ est concave s.c.s. sur K_2 ;*
• *pour tout $y \in K_2$, l'application $L(\cdot, y)$ est convexe s.c.i. sur K_1.*
De plus on suppose que
1) *si K_1 est non borné, il existe $y_0 \in K_2$ tel que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} L(x, y_0) = +\infty\,;$$

2) *si K_2 est non borné, il existe $x_0 \in K_1$ tel que*

$$\lim_{\|y\| \to \infty} L(x_0, y) = -\infty.$$

Alors L admet au moins un point-selle sur $K_1 \times K_2$.

Démonstration. Nous procéderons en trois étapes.
Etape 1. On suppose que les ensembles K_1 et K_2 sont *bornés* et que pour tout $y \in K_2$, la fonction $x \mapsto L(x, y)$ est *strictement convexe*.

Posons, pour $y \in K_2$, $F(y) := \inf_{x \in K_1} L(x, y)$. Dans ce cas, d'après le corollaire 1.4, il existe un unique $\varphi(y) \in K_1$ tel que

$$L(\varphi(y), y) = \min_{x \in K_1} L(x, y) = F(y)\,.$$

Comme F est l'enveloppe inférieure de fonctions concaves et s.c.s., elle est concave et s.c.s. Par conséquent K_2 étant borné et convexe, il existe, d'après le corollaire 1.4, $y_* \in K_2$ tel que $F(y_*) = \max_{y \in K_2} F(y)$. Nous allons vérifier que $(\varphi(y_*), y_*)$ est un point-selle de L sur $K_1 \times K_2$. Posons

$$x_* := \varphi(y_*), \quad \text{et pour } (t, y) \in [0, 1] \times K_2, \quad x_t := \varphi((1-t)y_* + ty).$$

D'après la concavité de $L(x, \cdot)$ on a pour tout $x \in K_1$

$$L(x, (1-t)y_* + ty) \geq (1-t)L(x, y_*) + tL(x, y),$$

d'où on déduit successivement (puisque $L(x_t, y_*) \geq F(y_*)$)

$$\begin{aligned} F(y_*) &\geq F((1-t)y_* + ty)) = L(x_t, (1-t)y_* + ty) \\ &\geq (1-t)L(x_t, y_*) + tL(x_t, y) \\ &\geq (1-t)F(y_*) + tL(x_t, y), \end{aligned}$$

ce qui donne en fin de compte, pour tout $y \in K_2$, $F(y_*) \geq L(x_t, y)$. En faisant tendre t vers zéro, K_1 étant un convexe borné d'un espace de Banach réflexif, il existe une sous-suite $t_n \downarrow 0$ et un point $\widetilde{x} \in K_1$ tel que l'on ait $x_{t_n} \rightharpoonup \widetilde{x}$ dans X-faible. Pour $y \in K_2$ fixé, $L(\cdot, y)$ est convexe s.c.i., donc faiblement s.c.i., et par conséquent $F(y_*) \geq \liminf_{t_n \to 0} L(x_{t_n}, y) \geq L(\widetilde{x}, y)$. D'autre part, puisque :

$$\begin{aligned} (1-t_n)L(x_{t_n}, y_*) + t_n L(x_{t_n}, y) &\leq L(x_{t_n}, (1-t_n)y_* + t_n y) \\ &\leq L(x, (1-t_n)y_* + t_n y)\,, \end{aligned}$$

en prenant la lim inf à gauche et la lim sup à droite, on déduit que pour tout $x \in K_1$

$$L(\widetilde{x}, y_*) \leq L(x, y_*).$$

Finalement $L(\cdot, y_*)$ étant strictement convexe, on doit avoir $\widetilde{x} = x_*$. On en conclut que lorsque $t \to 0$, on a $x_t \rightharpoonup x_*$ et

$$L(x_*, y) \leq \inf_{x \in K_1} L(x, y_*) = L(x_*, y_*) \leq L(x, y_*),$$

i.e. que (x_*, y_*) est point-selle de L sur $K_1 \times K_2$.

Etape 2. Maintenant supposons seulement que les ensembles K_1 et K_2 sont *bornés*. Si $L(\cdot, y)$ n'est pas strictement convexe, on peut la perturber pour la rendre telle. A cet effet on utilisera le résultat suivant de E. Asplund [8] :

> **Théorème.** *Soit X un espace de Banach réflexif. Il existe alors une norme équivalente strictement convexe sur X, i.e. une norme telle que si $0 < t < 1$ et $x_1, x_2 \in X$ vérifient $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ et $x_1 \neq x_2$, alors $\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1$.*

On supposera donc que X est muni d'une norme strictement convexe $\|\cdot\|$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut facilement vérifier que pour chaque $y \in K_2$,

$$x \mapsto L_\varepsilon(x, y) := L(x, y) + \varepsilon \|x\|^2$$

est strictement convexe sur K_1. Le résultat de la première étape montre l'existence d'un point-selle $(x_*^\varepsilon, y_*^\varepsilon)$ pour L_ε. On a donc, pour tous $x \in K_1$ et $y \in K_2$:

$$L(x_*^\varepsilon, y) \leq L(x_*^\varepsilon, y_*^\varepsilon) + \varepsilon \|x_*^\varepsilon\|^2 \leq L(x, y_*^\varepsilon) + \varepsilon \|x\|^2.$$

En faisant tendre ε vers zéro, K_1 et K_2 étant bornés et X, Y réflexifs, on peut extraire des sous-suites de $x_*^\varepsilon, y_*^\varepsilon$ convergeant respectivement vers x_* et y_*. En passant à la lim inf et lim sup dans $L(x_*^\varepsilon, y) \leq L(x, y_*^\varepsilon) + \varepsilon \|x\|^2$, on conclut que $L(x_*, y) \leq L(x, y_*)$, c'est à dire que (x_*, y_*) est un point-selle de L sur $K_1 \times K_2$.

Etape 3. Considérons maintenant le cas général où K_1 ou K_2 ne sont pas bornés, mais L vérifie les conditions 1) ou 2). Soient pour $n \geq 1$, $B_1(0, n)$ et $B_2(0, n)$ des boules fermées de centre 0 et de rayon n dans les espaces X et Y respectivement. En posant

$$K_{1n} := K_1 \cap B_1(0, n), \qquad K_{2n} := K_2 \cap B_2(0, n),$$

Pour n assez grand on a $K_{1n} \times K_{2n} \neq \varnothing$, et on sait d'après l'étape 2, qu'il existe un point-selle (x_*^n, y_*^n) de L sur $K_{1n} \times K_{2n}$. Par conséquent pour tous $x \in K_{1n}$ et $y \in K_{2n}$ on a

$$L(x_*^n, y) \leq L(x_*^n, y_*^n) \leq L(x, y_*^n).$$

Montrons que la suite (x_*^n, y_*^n) est bornée dans $X \times Y$. Si K_1 (resp. K_2) est borné, on sait que x_*^n (resp. y_*^n) est borné. Sinon, si K_1 n'est pas borné et K_2 est borné, on désigne par x_0 un point quelconque de K_1 et, y_0 étant donné par la condition 1), on a, pour n assez grand, $x_0 \in K_{1n}$, $y_0 \in K_{2n}$ et :

$$L(x_*^n, y_0) \leq L(x_0, y_*^n) \leq \sup_{y \in K_2} L(x_0, y) < +\infty.$$

La condition 1) du théorème implique alors que la suite $(x_*^n)_n$ est bornée dans X.

On traite de manière analogue le cas où K_1 est borné et K_2 n'est pas borné et celui où K_1 et K_2 ne sont pas bornés.

On peut donc extraire de $(x_*^n, y_*^n)_n$ une sous-suite convergeant faiblement vers (x_*, y_*) et en passant, comme précédemment à la lim inf et lim sup dans l'inégalité $L(x_*^n, y) \leq L(x, y_*^n)$, pour x et y fixés, on conclut que (x_*, y_*) est un point-selle de L sur $K_1 \times K_2$. □

Lorsque L est strictement convexe en x, ou strictement concave en y, on peut aisément montrer que la composante x_* ou y_* du point-selle est unique. On a ainsi :

3.5 Proposition. *Soient (x_*, y_*) et (u, v) deux points-selles de L sur $K_1 \times K_2$.*
- *Si pour tout $y \in K_2$, $L(\cdot, y)$ est strictement convexe sur K_1, alors on a $x_* = u$.*
- *Si pour tout $x \in K_1$, $L(x, \cdot)$ est strictement concave sur K_2, alors on a $y_* = v$.*

Lorsque $L(\cdot, y)$ et $L(x, \cdot)$ sont G-dérivables, on peut caractériser un point-selle à l'aide des G-dérivées de ces fonctions.

3.6 Proposition. *On suppose que L est convexe-concave sur $K_1 \times K_2$ et que $L(\cdot, y)$ et $L(x, \cdot)$ admettent des G-dérivées notées respectivement $\partial_x L(\cdot, y)$, et $\partial_y L(x, \cdot)$. Alors les deux proprités suivantes sont équivalentes.*
(i) *$(x_*, y_*) \in K_1 \times K_2$ est un point selle de L sur $K_1 \times K_2$.*
(ii) *$(x_*, y_*) \in K_1 \times K_2$ et pour tout $(x, y) \in K_1 \times K_2$ on a*

$$\langle \partial_x L(x_*, y_*), x - x_* \rangle \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \partial_y L(x_*, y_*), y - y_* \rangle \leq 0.$$

Si de plus $\partial_x L(\cdot, y)$ et $\partial_y L(x, \cdot)$ sont hémicontinues (i.e. continues sur les segments de droites), alors les propriétés ci-dessus sont équivalentes à
(iii) *$(x_*, y_*) \in K_1 \times K_2$ et pour tout $(x, y) \in K_1 \times K_2$ on a*

$$\langle \partial_x L(x, y_*), x - x_* \rangle \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \partial_y L(x_*, y), y - y_* \rangle \leq 0.$$

La démonstration étant en tout point identique à celle de la proposition 1.6, nous la laissons en exercice.

4. Une application du théorème de min-max

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$. Par exemple, on peut prendre Ω régulier et $Au := -\Delta u$ avec la condition au bord de Dirichlet, auquel cas on a $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ou bien, de façon plus générale, prendre A un opérateur auto-adjoint elliptique comme dans (2.2).

Un premier exemple d'application du théorème de Ky Fan-von Neumann est la résolution du problème suivant : soient $h \in L^2(\Omega)$, et $\rho \in L^\infty(\Omega)$, trouver $u \in D(A)$ solution de

$$Au = \rho u + h. \tag{4.1}$$

En supposant que l'injection du domaine $D(A)$, muni de la norme du graphe, est compacte dans $L^2(\Omega)$, on sait (voir paragraphes § **1.**9 et § **1.**12) que A possède une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_n$, chaque valeur propre étant de multiplicité finie (dire que $D(A)$ est compact dans $L^2(\Omega)$ est équivalent à dire que A est à résolvante compacte). Pour le problème qui nous préoccupe ici, on supposera que $\lambda_1 > 0$ et que $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ pour $n \geq 1$.

On peut résoudre l'équation (4.1) en utilisant le théorème de min-max de Ky Fan-von Neumann (comparer avec l'application du lemme de Lax-Milgram).

On conviendra ici de poser $\lambda_0 := -\infty$.

4.1 Proposition. *Soit A un opérateur auto-adjoint à domaine $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$. On suppose que A est à résolvante compacte et que la suite de ses valeurs propres λ_n vérifie $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Soit $\rho \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \exists k \geq 0, \qquad \lambda_k < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \lambda_{k+1}.$$

Alors pour toute $h \in L^2(\Omega)$, l'équation (4.1) admet une solution unique.

Démonstration. On considère $H := D(A^{1/2})$; ici et par la suite, dans le souci de simplifier les notations, pour $u, v \in H$, on écrit $(Au|v)$ au lieu de $(A^{1/2}u|A^{1/2}v)$ et on munit H de la norme définie par $\|u\|_H := (Au|u)^{1/2}$, où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Sur H on définit la fonction

$$J(u) := \frac{1}{2}(Au|u) - \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(x)|u(x)|^2 dx - (h|u). \tag{4.2}$$

Il est clair que J est de classe C^1 sur H, et que l'on a pour tout $v \in H$

$$\langle J'(u), v\rangle = (Au|v) - \int_\Omega \rho(x)u(x)v(x)dx - \int_\Omega h(x)v(x)dx. \tag{4.3}$$

On peut voir facilement que si on a $k \geq 1$, la dérivée $J'(u) = Au - \rho u - h$ n'est pas monotone et la fonction J n'est ni convexe, ni concave. Nous allons utiliser le théorème de Ky Fan-von Neumann en décomposant H en deux sous-espaces H_1 et H_2 de la façon suivante : soit $\varphi_n \in D(A)$ une fonction propre telle que $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ et $\|\varphi_n\|^2 = 1$. On pose

$$H_1 := \bigoplus_{n\leq k} \mathbb{R}\varphi_n, \qquad H_2 := \bigoplus_{n\geq k+1} \mathbb{R}\varphi_n$$

de sorte que, A étant auto-adjoint, $H = H_1 \oplus^\perp H_2$ et tout élément $v \in H$ peut s'écrire de façon unique $v = v_1 + v_2$, avec $v_i \in H_i$. En posant

$$L(v_1, v_2) := J(v_1 + v_2),$$

on va vérifier que $L(\cdot, v_2)$ est strictement concave sur H_1, alors que $L(v_1, \cdot)$ est strictement convexe sur H_2. En effet, en utilisant le fait que ρ est compris entre

α et β et, en remarquant que pour $z_1 := v_1 - w_1 \in H_1$ on a $(Az_1|z_1) \leq \lambda_k \|z_1\|^2$, on peut voir que la G-dérivée de $v_1 \mapsto J(v_1 + v_2)$ vérifie

$$\begin{aligned} &\langle \partial_1 L(v_1, v_2) - \partial_1 L(w_1, v_2), v_1 - w_1 \rangle \\ &\qquad = (A(v_1 - w_1) - \rho(v_1 - w_1)|v_1 - w_1) \\ &\qquad \leq -(\alpha - \lambda_k)\|v_1 - w_1\|^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

ce qui (cf. lemme **1.**15.4) signifie que $L(\cdot, v_2)$ est strictement concave. De manière analogue on peut établir l'inégalité :

$$\begin{aligned} &\langle \partial_2 L(v_1, v_2) - \partial_2 L(v_2, w_2), v_2 - w_2 \rangle \\ &\qquad = (A(v_2 - w_2) - \rho(v_2 - w_2)|v_2 - w_2) \\ &\qquad \geq (\lambda_{k+1} - \beta)\|v_2 - w_2\|^2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

c'est-à-dire que $L(v_1, \cdot)$ est strictement convexe sur H_2. De plus ces inégalités montrent que

$$\lim_{\|v_1\| \to \infty} L(v_1, v_2) = -\infty, \qquad \lim_{\|v_2\| \to \infty} L(v_1, v_2) = +\infty.$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.4, L admet un point-selle unique (u_1, u_2) sur $H_1 \times H_2$ et on vérifie sans peine que $u := u_1 + u_2$ est solution de l'équation (4.1). En effet d'après la caractérisation du point-selle (proposition 3.6), et du fait que H_1 et H_2 sont des espaces vectoriels, on a pour tout $v_i \in H_i$ avec $i = 1, 2$:

$$0 = \langle \partial_i L(u_1, u_2), v_i \rangle = \langle J'(u_1 + u_2), v_i \rangle,$$

ce qui signifie que pour tout $v := v_1 + v_2 \in H$ on a $\langle J'(u), v \rangle = 0$.

Pour montrer l'unicité de la solution, on peut utiliser le fait que si u est solution, alors (u_1, u_2) est point-selle de L. On peut aussi procéder directement. En effet comme l'équation est linéaire, pour montrer l'unicité, supposons que $h := 0$. On a, en notant que $(Au_1|u_2) = 0$,

$$\lambda_k \|u_1\|^2 \geq (Au_1|u_1) = (\rho u_1|u_1) + (\rho u_1|u_2) \geq \alpha \|u_1\|^2 + (\rho u_1|u_2),$$

mais comme on a aussi

$$\int_\Omega \rho u_1 u_2 dx = (Au_2|u_2) - (\rho u_2|u_2) \geq (\lambda_{k+1} - \beta)\|u\|^2 \,,$$

on conclut que :

$$0 \geq (\lambda_k - \alpha)\|u_1\|^2 \geq (\lambda_{k+1} - \beta)\|u_2\|^2 \geq 0,$$

c'est à dire que $u_1 = u_2 = 0$. □

Soit maintenant une fonction $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On souhaite résoudre une version semilinéaire du problème précédent, i.e. l'équation

$$u \in D(A), \qquad Au = g(\cdot, u) + h. \tag{4.6}$$

On ne considérera ici que le cas où la fonction g est *sous-linéaire* et qu'elle *ne voit pas* le spectre de A dans ce sens qu'il existe un entier $k \geq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que p.p. sur Ω

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \text{ avec } s \neq t, \qquad \lambda_k < \alpha \leq \frac{g(\cdot,s) - g(\cdot,t)}{s-t} \leq \beta < \lambda_{k+1}, \tag{4.7}$$

où on conviendra que $\lambda_0 := -\infty$. On va montrer que pour toute fonction $h \in L^2(\Omega)$ donnée, l'équation (4.6) admet une solution unique (rappelons que la condition de Caratheodory signifie que $(x,s) \mapsto g(x,s)$ est mesurable en x, continue en s).

4.2 Proposition. *Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$. On suppose que A est à résolvante compacte et que la suite de ses valeurs propres λ_n vérifie $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Soit g une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition de Caratheodory (**1.***16.1) ainsi que la condition (4.7). Alors pour toute $h \in L^2(\Omega)$, l'équation (4.6) admet une solution unique.*

Démonstration. On considère $H := D(A^{1/2})$, et la fonction

$$J(u) := \frac{1}{2}(Au|u) - \int_\Omega G(x,u(x))dx - (h|u) \tag{4.8}$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et $G(x,s) := \int_0^s g(x,\sigma)d\sigma$. Comme dans la démonstration de la proposition 4.1, on munit H de la norme définie par $\|u\|_H := (Au|u)^{1/2}$, et il est clair que J est de classe C^1 sur H et que l'on a pour tout $v \in H$

$$\langle J'(u), v\rangle = (Au|v) - \int_\Omega g(x,u(x))v(x)dx - \int_\Omega h(x)v(x)dx. \tag{4.9}$$

Les points critiques de J sur H correspondent donc aux solutions de (4.6). Mais ici encore J n'est ni convexe, ni concave sur H et de plus si $k \geq 1$ on a

$$\inf_{u\in H} J(u) = \inf_{t\in\mathbb{R}} J(t\varphi_k) = -\infty\,,$$
$$\sup_{u\in H} J(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}} J(t\varphi_{k+1}) = +\infty\,.$$

En reprenant les notations précédentes on pose

$$L(v_1,v_2) := J(v_1+v_2),$$

et on va vérifier que $L(\cdot,v_2)$ est strictement concave sur H_1, alors que $L(v_1,\cdot)$ est strictement convexe sur H_2. En effet, (4.7) implique que, presque partout sur Ω, on a

$$(g(\cdot,v_1+v_2) - g(\cdot,w_1+v_2))\cdot(v_1-w_1) \geq \alpha(v_1-w_1)^2\ ; \tag{4.10}$$

et puisque pour $z_1 := v_1 - w_1 \in H_1$ on a $(Az_1|z_1) \leq \lambda_k\|z_1\|^2$, on peut calculer la G-dérivée de $v_1 \mapsto J(v_1+v_2)$ pour obtenir, en utilisant l'ingalité ci-dessus :

$$\langle \partial_1 L(v_1, v_2) - \partial_1 L(w_1, v_2), v_1 - w_1 \rangle \leq -(\alpha - \lambda_k)\|v_1 - w_1\|^2, \tag{4.11}$$

ce qui signifie que $L(\cdot, v_2)$ est strictement concave. De manière analogue on peut établir l'inégalité :

$$\langle \partial_2 L(v_1, v_2) - \partial_2 L(v_2, w_2), v_2 - w_2 \rangle \geq (\lambda_{k+1} - \beta)\|v_2 - w_2\|^2, \tag{4.12}$$

c'est à dire que $L(v_1, \cdot)$ est strictement convexe sur H_2. De plus les inégalités (4.11) et (4.12) montrent que

$$\lim_{\|v_1\| \to \infty} L(v_1, v_2) = -\infty, \qquad \lim_{\|v_2\| \to \infty} L(v_1, v_2) = +\infty.$$

Par conséquent d'après le théorème de Ky Fan-von Neumann, L admet un unique point-selle (u_1, u_2) sur $H_1 \times H_2$. On conclut que pour tout $(v_1, v_2) \in H_1 \times H_2$ on a

$$\langle J'(u_1 + u_2), v_1 \rangle = 0, \qquad \langle J'(u_1 + u_2), v_2 \rangle = 0,$$

ce qui signifie que si $u := u_1 + u_2$, on a $\langle J'(u), v \rangle = 0$, pour tout $v = v_1 + v_2 \in H$. Par conséquent u est solution de (4.6).

Il nous reste à montrer l'unicité de la solution. Si $z \in H$ était une solution distincte de u on aurait $Aw = \rho w$, en posant $w := u - z \neq 0$ et ρ étant défini par

$$\rho(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x, u(x)) - g(x, z(x))}{u(x) - z(x)} & \text{si } u(x) \neq z(x)\ , \\ \alpha & \text{si } u(x) = z(x). \end{cases}$$

Comme on a $\lambda_k < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \lambda_{k+1}$, la proposition 4.1 implique que $w = 0$, contrairement à l'hypothèse. □

4.3 Remarque. Lorsque $\alpha \leq [g(\cdot, s) - g(\cdot, t)]/(s - t) \leq \beta$ et en supposant qu'il existe une valeur propre λ_k dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, la résolution de l'équation (4.6) devient plus complexe ; les conditions (sur la donnée h et α, β) pour lesquelles on peut trouver une solution ne sont connues que dans certains cas. A ce sujet voir plus loin le chapitre **5**, ainsi que A. Ambrosetti & G. Prodi [5], E.N. Dancer [53], S. Fučik [66], B. Ruf [146], Th. Gallouët & O. Kavian [70]. □

5. Ensembles de niveau et points critiques

Si X est un ensemble et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application on posera, pour $a \in \mathbb{R}$

$$[J \leq a] := \{u \in X\ ;\ J(u) \leq a\}\,. \tag{5.1}$$

De façon analogue on définit les ensembles $[J < a]$, $[J \geq a]$, $[J > a]$ et les ensembles de niveau $[J = a]$.

Lorsque J est une fonction convexe s.c.i. définie sur un espace de Banach réflexif, on utilise deux choses pour montrer que J atteint sa borne inférieure m :

- $m \in \mathbb{R}$ est tel que $[J < m] = \varnothing$;
- pour $\varepsilon > 0$ petit les ensembles $[J \leq m + \varepsilon]$ sont non-vides et faiblement compacts.

En réalité, le point crucial dans l'existence des points critiques est la *différence topologique* entre les ensembles $[J < c]$ et $[J \leq c + \varepsilon]$ pour certaines valeurs de $c \in \mathbb{R}$ (en outre certaines hypothèses de compacité seront requises). Voici quelques exemples pour illustrer ce point de vue.

1) Soit $J(x) := x^3 - 3x$ pour $x \in \mathbb{R}$; la dérivée J' s'annule en ± 1 et en posant $c_1 := J(1) = -2$ et $c_2 := J(-1) = 2$, on remarque que

- si $a_1 < c_1$, l'ensemble $[J \leq a_1]$ est du type $]-\infty, \alpha_1]$, pour un certain $\alpha_1 \in \mathbb{R}$;
- si $c_1 < a_2 < c_2$, on a $[J \leq a_2] =]-\infty, \alpha_2] \cup [\beta_2, \gamma_2]$ avec $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$. En particulier l'ensemble $[J \leq a_2]$ a deux composantes connexes ;
- enfin si $a_3 > c_2$, on a $[J \leq a_2] =]-\infty, \alpha_3]$.

Dans chacun des cas, on peut voir facilement que a_i étant choisi comme ci-dessus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit les ensembles $[J \leq a_i]$ et $[J \leq a_i + \varepsilon]$ sont homéomorphes et peuvent être *déformés* continûment l'un en l'autre, alors qu'il n'en est pas de même pour les ensembles $[J \leq c_i]$ et $[J \leq c_i + \varepsilon]$.

2) Soit $J(x, y) := x^2 - y^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on sait que 0 est la seule valeur critique de J. On vérifie sans difficulté que si $\varepsilon > 0$, alors $[J \leq \varepsilon]$ est connexe, alors que $[J \leq -\varepsilon]$ a deux composantes connexes.

3) Mais la seule notion du nombre de composantes connexes ne suffit pas pour pouvoir différencier suffisamment les ensembles $[J \leq a]$. Considérons pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $J(x, y) := (x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)$. On vérifie que J a deux valeurs critiques $c_1 := -1$ et $c_2 := 0$. On voit facilement que si $a_1 < c_1$, l'ensemble $[J < a_1]$ est vide, que pour $c_1 < a_2 < c_2$ l'ensemble $[J \leq a_2]$ est un anneau du type $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ avec $r < R$, alors que si $a_3 > c_2$, $[J \leq a_3]$ est une boule $B(0, R)$. Ici, lors du passage de la valeur critique $c_2 = 0$, le nombre de composantes connexes des ensembles $[J \leq a]$ ne change pas, mais $[J \leq a_3]$ est simplement connexe alors que $[J \leq a_2]$ ne l'est pas. On constate donc néanmoins que ces ensembles deviennent topologiquement différents au passage de $c_2 = 0$.

Bien que cet aspect topologique (théorie de Morse) soit très riche et intéressant à étudier, nous n'aborderons pas son étude systématique ; pour les applications à la résolution d'équations aux dérivées partielles, nous garderons seulement l'idée principale, à savoir que les valeurs critiques sont des valeurs c pour lesquelles on ne peut pas *déformer continûment*, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les ensembles $[J \leq c + \varepsilon]$ en les ensembles $[J \leq c - \varepsilon]$. Pour une introduction à la théorie de Morse on pourra consulter J.W. Milnor [117].

Pour préciser ce que nous entendons par *déformer continûment*, nous présentons ici un lemme de déformation pour les fonctions J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sans optimiser les hypothèses nécessaires à sa démonstration.

5.1 Lemme de déformation. *Soient $J \in C^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :*
(i) *l'ensemble $[c - \varepsilon_0 \le J \le c + \varepsilon_0]$ est compact.*
(ii) *Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [c - \varepsilon_0 \le J \le c + \varepsilon_0]$, on a $\|J'(x)\| \ge \lambda$.*
Alors pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0/2$ il existe un homéomorphisme Φ de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi([J \le c + \varepsilon]) \subset [J \le c - \varepsilon]$.

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$; posons $\alpha := 2\varepsilon/\lambda^2$ et

$$A := [J \le c - \varepsilon_0] \cup [J \ge c + \varepsilon_0] \qquad B := [c - \varepsilon \le J \le c + \varepsilon].$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ une fonction localement lipschitzienne telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$; par exemple, $d(\cdot, \cdot)$ étant la distance d'un point à un ensemble fermé, on pourra prendre

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \ .$$

Alors l'équation différentielle

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha f(x(t)) J'(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique $x(t)$ qui existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ car $x \mapsto -\alpha f(x) J'(x)$ est localement lipschitzienne et uniformément bornée sur $\mathbb{R}^n$. De plus, d'après la dépendance continue de la solution d'une équation différentielle par rapport aux données initiales, on sait que $x_0 \mapsto x(t)$ est continue. Nous noterons cette solution $\eta(t, x_0) := x(t)$. Notons que J décroît le long de la trajectoire $\eta(\cdot, x_0)$, en effet on a

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\eta(t, x_0)) &= \langle J'(\eta(t, x_0)), \frac{d\eta}{dt}(t, x_0) \rangle \\ &= -\alpha f(\eta(t, x_0)) \|J'(\eta(t, x_0))\|^2 \le 0. \end{aligned}$$

On posera $\Phi(x_0) := \eta(1, x_0)$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour vérifier que Φ répond à la question, soit $x_0 \in [J \le c + \varepsilon]$; si on a $J(x_0) \le c - \varepsilon$, alors puisque $t \mapsto J(\eta(t, x_0))$ est décroissante, on aura $\Phi(x_0) \in [J \le c - \varepsilon]$. Si pour tout $t \in [0, 1[$, $\eta(t, x_0)$ est dans l'ensemble $[c - \varepsilon < J \le c + \varepsilon]$, alors

$$\begin{aligned} J(\eta(1, x_0)) &= J(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} J(\eta(t, x_0)) dt \\ &= J(x_0) - \alpha \int_0^1 f(\eta(t, x_0)) \|J'(\eta(t, x_0))\|^2 dt \\ &\le J(x_0) - \alpha\lambda^2 \le c - \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la trajectoire de η passant par x_0 sort, au plus tard au temps $t = 1$, de l'ensemble $[c - \varepsilon < J \le c + \varepsilon]$ pour entrer dans $[J \le c - \varepsilon]$. □

5.2 Remarque. La fonction $\eta(\cdot, x_0)$ définie par (5.2) est appelée le *flot* associé à J passant par le point x_0. Noter qu'en inversant le sens du temps t on peut déformer $[J \leq c-\varepsilon]$ en $[J \leq c+\varepsilon]$. Il faut aussi attirer l'attention sur le fait que nous avons montré beaucoup plus que l'existence de l'homéomorphisme Φ. En effet le flot η possède les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto \eta(t,x)$ est un homéomorphisme ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\eta(0,x) = x$;
- si $x \notin [c-\varepsilon_0 \leq J \leq c+\varepsilon_0]$, on a pour tout $t \in [0,1]$, $\eta(t,x) = x$;
- si $x \in [c-\varepsilon \leq J \leq c+\varepsilon]$, on a $\eta(1,x) \in [J \leq c-\varepsilon]$.

De plus nous verrons plus loin que si c n'est pas une valeur critique, alors $[J \leq c-\varepsilon]$ est une *déformation rétracte* de $[J \leq c+\varepsilon]$. □

5.3 Remarque. Notons que comme $\mathbb{R}^n$ est localement compact, si $c \in \mathbb{R}$ et J sont tels que pour un $\varepsilon_0 > 0$ l'ensemble $[c-\varepsilon_0 \leq J \leq c+\varepsilon_0]$ est borné et ne contient pas de valeur critique de J, alors $\|J'(x)\|$ est minorée sur cet ensemble et on peut appliquer le lemme. On voit également que dans la pratique, pour montrer l'existence d'une valeur critique pour J, on essaie de construire une valeur $c \in \mathbb{R}$ telle que pour diverses raisons, on sait que les ensembles $[J \leq c-\varepsilon]$ et $[J \leq c+\varepsilon]$ ne sont pas homéomorphes. □

On constate, lors de la démonstration de ce lemme de déformation, que l'on doit construire des trajectoires le long desquelles la valeur de J décroît. Dans un espace de dimension finie, ou dans un espace de Hilbert, on voit qu'il faut construire ces trajectoires dans la direction opposée au gradient de la fonction. Mais si la fonction J est définie sur un espace de Banach X, la dérivée $J'(x)$ est un élément du dual X' et par conséquent il faut définir des directions *(presque) parallèles* au gradient, dans un sens approprié. L'autre difficulté provient de ce que dans un espace de dimension infinie, on n'a pas de compacité locale et une fonction continue sur un ensemble borné n'y est pas nécessairement bornée, ce qui complique légèrement la construction du flot $\eta(\cdot, x)$.

6. Condition de Palais-Smale

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la *condition de Palais-Smale*.

6.1 Définition. *Soient X un espace de Banach, et $J : X \longrightarrow R$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la* **condition de Palais-Smale** *(au niveau c), si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que*

$$J(u_n) \to c \quad \text{dans } \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad J'(u_n) \to 0 \quad \text{dans } X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Intuitivement, ce que l'on exige c'est la compacité des suites qui ont tendance à *réaliser* une valeur critique. Mais, même si la fonction est bornée inférieurement

et $c := \inf J$, il n'est pas du tout évident que lorsque $J(u_n) \to c$, alors $J'(u_n)$ tend vers zéro. Considérer par exemple la fonction $J(x) := e^{-x}(2 + \sin(e^{2x}))$ définie sur $\mathbb{R}$ et $c := 0$. Comme on le verra ci-dessous lors de l'application du lemme d'Ekeland, il faudra en plus supposer que la fonction J vérifie la condition de Palais-Smale. Si J vérifie la condition de Palais-Smale en $c \in \mathbb{R}$, une conséquence importante est que l'ensemble :

$$K(c) := \{u \in X \ ; \ J(u) = c, \ \text{ et } \ J'(u) = 0\},$$

est compact ; il en est de même de $\cup_{a \le c \le b} K(c)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

En fait, très souvent il faut adapter la définition de la condition de Palais-Smale au problème que l'on veut résoudre. Une variante est la suivante : s'il existe $(u_n)_n$ une suite de X telle que $J(u_n)$ tend vers c et $J'(u_n) \to 0$ dans X', alors c est une valeur critique de J. On pourrait aussi, par exemple, donner une condition analogue pour les fonctions définies seulement sur une partie de X, ou restreindre l'existence de sous-suite convergente pour les $(u_n)_n$ telles que $J(u_n) \downarrow c$ (i.e. $J(u_n)$ *décroît* vers c) et $J'(u_n) \to 0$, ou bien encore se contenter d'avoir une sous-suite convergente *modulo* une certaine transformation (par exemple, si $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on exigera que la suite des translatées $v_n := u_n(\cdot + x_n)$ soit relativement compacte pour une suite x_n de $\mathbb{R}^N$ bien choisie), etc. Voir aussi *Exercices* pour d'autres variantes.

6.2 Exemple. La fonction $J(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$, ne vérifie pas la condition de Palais-Smale en 0.

6.3 Exemple. Voici un exemple plus intéressant. Soit $(A, D(A))$ l'opérateur auto-adjoint à résolvante compacte défini sur $L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné, par $Au = -\Delta u$ pour $u \in D(A)$ avec

$$D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

On désigne par $\mathrm{Sp}(A) := (\lambda_k)_{k \ge 1}$ la suite des valeurs propres de A ; on rappelle qu'en identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual on a $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ avec injections continues et denses. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ fixés, soit la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$) :

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^2 - \lambda v^2(x) \right] dx - \langle f, v \rangle.$$

Alors, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, J satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$. En effet en notant $\widetilde{A}$ l'extension de A à $H_0^1(\Omega)$ (voir remarque **1.**9.3 ; en fait $\widetilde{A}v = -\Delta v$ au sens des distributions, et souvent on utilisera cet abus de notation) alors on a $J'(v) = \widetilde{A}v - \lambda v - f$ et $\widetilde{A} - \lambda I$ est un homéomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Si $(u_n)_n$ est une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que $J(u_n) \to c$ et

$$J'(u_n) = \widetilde{A}u_n - \lambda u_n - f = \varepsilon_n \to 0 \ \text{ dans } \ H^{-1}(\Omega),$$

alors $u_n = (\widetilde{A} - \lambda I)^{-1}[f + \varepsilon_n] \to u := (\widetilde{A} - \lambda I)^{-1} f$ dans $H_0^1(\Omega)$ (cela montre en passant que la seule valeur critique de J est $c = J\left((\widetilde{A} - \lambda I)^{-1} f\right)$, ce que l'on peut aussi voir en utilisant la proposition 4.1).

D'autre part, il est intéressant de noter que si $\lambda = \lambda_k$ pour un $k \geq 1$ et si par exemple $f = 0$, alors J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale. En effet $\varphi_k \not\equiv 0$ étant une fonction propre associée à λ_k, la suite $(u_n)_n := (n\varphi_k)_{n\geq 1}$, ne contient aucune sous-suite convergente, bien que $J(n\varphi_k) = 0$ et $J'(n\varphi_k) = 0$. □

6.4 Exemple. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. On considère pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx. \tag{6.1}$$

On va voir que J satisfait la condition de Palais-Smale. En effet si $(u_n)_n$ est une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$J(u_n) \to c, \qquad J'(u_n) = -\Delta u_n + \lambda |u_n|^{p-1}u_n \to 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega),$$

alors on a

$$\begin{aligned}\langle J'(u_n), u_n\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \lambda \int_\Omega |u_n(x)|^{p+1} dx \\ &= (p+1)E(u_n) - \frac{p-1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Or $|\langle J'(u_n), u_n\rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{H^{-1}} \|\nabla u_n\|$, et on peut en déduire que (ici $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$) :

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|^2 \leq (p+1)E(u_n) + \|J'(u_n)\|_{H^{-1}}\|\nabla u_n\|.$$

Comme $p - 1 > 0$, cette inégalité montre que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$; puisque Ω est borné et que $p+1 < 2^*$, l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich-Kondrachov) et, on peut extraire une sous-suite $v_i := u_{n_i}$ qui converge vers v dans $H_0^1(\Omega)$-faible ainsi que dans $L^{p+1}(\Omega)$-fort.

En utilisant le lemme **1**.16.1, on en conclut que $|v_i|^{p-1}v_i \to |v|^{p-1}v$ dans $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, donc aussi dans $H^{-1}(\Omega)$, et finalement :

$$-\Delta v_i = J'(v_i) - \lambda |v_i|^{p-1}v_i \to -\lambda |v|^{p-1}v \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

En appelant B l'opérateur qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ fait correspondre z solution de :

$$z \in H_0^1(\Omega), \qquad -\Delta z = f \quad \text{au sens } H^{-1}(\Omega),$$

on sait que B est continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (en fait, avec les notations de l'exemple précédent, $B = \widetilde{A}^{-1}$). On a donc :

$$v_i = B(J'(v_i) - \lambda |v_i|^{p-1}v_i) \to B(-\lambda |v|^{p-1}v) \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_n$ contient une sous-suite convergente. Naturellement, on obtient une information supplémentaire : en effet puisque $v_i \rightharpoonup v$, on doit avoir $v = -\lambda B(|v|^{p-1}v)$, c'est à dire que $v \in H_0^1(\Omega)$ est solution de :

$$-\Delta v + \lambda|v|^{p-1}v = 0 \quad \text{au sens } \ H^{-1}(\Omega).$$

Remarquer que dans cette approche il faut utiliser les deux informations "$J(u_n)$ est bornée" et "$J'(u_n)$ tend vers zéro", pour déduire que la suite $(u_n)_n$ est bornée. Ensuite c'est un théorème de compacité qui permet de conclure. Nous verrons plus loin que si $(N-2)p = N+2$ avec $N \geq 3$ et $\lambda < 0$, alors J *ne vérifie pas* la condition de Palais-Smale (cependant pour le cas où $\lambda > 0$ et $p > 1$ quelconque, voir *Exercices*). □

6.5 Exemple. Nous traitons ici un cas qui va nous servir par la suite, et qui est une généralisation de l'exemple que nous venons de voir. Soit A un opérateur elliptique du second ordre comme dans (2.2) et une fonction g de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Caratheodory (**1.**16.1). On pose $G(x,s) := \int_0^s g(x,\sigma)d\sigma$ et on considère sur $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle :

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[a(x)\nabla v(x)\cdot\ \nabla v(x) + \lambda|v(x)|^2\right] dx + \mu\int_\Omega G(x,v(x))dx - \langle f, v\rangle, \tag{6.2}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ sont fixés. On va montrer que si g satisfait des conditions de croissance adéquates, alors J vérifie la condition de Palais-Smale. Nous commencerons par montrer le lemme suivant :

6.6 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $m > 0$ p.p. sur Ω. On suppose qu'il existe $b_1 \geq 0$ et $b_0 \in L^{p_0}(\Omega)$ avec $p_0 > \frac{2N}{N+2}$ pour $N \geq 2$ et $p_0 := 1$ si $N = 1$, et enfin $\theta, p \geq 1$ tels que $(N-2)p < N+2$, vérifiant :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad m(x)|s|^\theta \leq b_0(x)|s| + b_1\left(1 + |s|^{p+1}\right).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + C(\varepsilon)\left(\int_\Omega m(x)|u(x)|^\theta dx\right)^{2/\theta}.$$

Le même résultat subsiste pour $u \in H^1(\Omega)$, si on suppose que Ω est de classe C^1.

Démonstration. Nous montrons le lemme pour $H_0^1(\Omega)$ et nous laissons en exercice le cas où cette inégalité est considérée sur l'espace $H^1(\Omega)$. Si le résultat n'était pas vrai, puisqu'il s'agit d'une inégalité homogène de degré deux, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx = 1 > \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + n\left(\int_\Omega m(x)|u_n(x)|^\theta dx\right)^{2/\theta}. \tag{6.3}$$

En particulier $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et en extrayant une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$, on a, grâce au théorème de compacité de Rellich-Kondrachov :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega)\text{-faible}, \qquad u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p.}$$

On en déduit que $\int_\Omega u(x)^2 dx = 1$. D'autre part, l'inégalité (6.3) montre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega m(x)|u_n(x)|^\theta dx = 0. \tag{6.4}$$

Mais puisque $p_0 > \frac{2N}{N+2}$ lorsque $N \geq 2$, on a $p_0' = p_0/(p_0-1) < 2^*$ et par conséquent, par le théorème de Rellich-Kondrachov, u_n tend vers u dans $L^{p_0'}(\Omega)$ et

$$\|b_0(u-u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|b_0\|_{L^{p_0}(\Omega)} \|u-u_n\|_{L^{p_0'}(\Omega)},$$

ce qui implique en particulier que $b_0|u_n|$ tend vers $b_0|u|$ dans $L^1(\Omega)$ et p.p. sur Ω. De même $|u_n|^{p+1}$ tend vers $|u|^{p+1}$ dans $L^1(\Omega)$ et presque partout. Finalement, si

$$Z_n(x) := b_0(x)|u_n(x)| + b_1\left(1 + |u_n(x)|^{p+1}\right),$$
$$Z(x) := b_0(x)|u(x)| + b_1\left(1 + |u(x)|^{p+1}\right),$$

on conclut que Z_n tend vers Z dans $L^1(\Omega)$ et presque partout. Comme on a $m|u_n| \leq Z_n$, d'après le corollaire **1.**4.14 on peut conclure que $m|u_n|^\theta$ tend vers $m|u|^\theta$ dans $L^1(\Omega)$ et que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega m(x)|u_n(x)|^\theta dx = \int_\Omega m(x)|u(x)|^\theta dx,$$

ce qui, joint à (6.4) et au fait que $m > 0$ presque partout, permet de dire que $u \equiv 0$ p.p., ce qui est en contradiction avec le fait que $\int_\Omega u(x)^2 dx = 1$. □

6.7 Proposition. *Soit Ω un ouvert borné. Si $N \geq 2$ soit $p_0 := \varepsilon + N/2$ pour un $\varepsilon > 0$ et $p_0 := 1$ si $N = 1$. Soit $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$; on suppose que g satisfait les conditions suivantes :*

$$\exists b_0 \in L^{p_0}(\Omega), \quad b_1 \geq 0, \qquad |g(x,s)| \leq b_0(x) + b_1|s|^p \tag{6.5}$$
$$\exists \theta > 2,\ R > 0,\ \text{t.q. si } |s| \geq R,\ 0 < \theta G(x,s) \leq s g(x,s). \tag{6.6}$$

Alors si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, la fonctionnelle J définie par (6.2) satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$. Si Ω est un ouvert de classe C^1 et $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq 2N/(N+2)$, J vérifie la condition de Palais-Smale sur $H^1(\Omega)$.

Démonstration. On remarquera que la condition (6.6) exprime le fait que G est à croissance sur-quadratique à l'infini. En effet si par exemple $s \geq R$ on a $\theta s^{-1} \leq \frac{g(x,s)}{G(x,s)}$ et par conséquent sur l'intervalle $[R, +\infty[$ on obtient $G(x,s) \geq G(x,R)R^{-\theta}s^\theta$. On a donc, pour une fonction $c_1 \in L^{p_0}(\Omega)$, pour $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$:

$$G(x,s) \geq \min(G(x,-R), G(x,R))R^{-\theta}|s|^\theta - c_1(x). \tag{6.7}$$

Il est également important de noter que la condition (6.5) implique que $\theta < 2^*$. Pour voir que J satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$, considérons une suite $(u_n)_n$ telle que $J(u_n) \to c$ et :

$$h_n := J'(u_n) = Au_n + \lambda u_n + \mu g(\cdot, u_n) - f \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Comme dans l'exemple précédent, on montre d'abord que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, puisque $\theta > 2$, en utilisant le fait qu'il existe $c_2 \in L^{p_0}(\Omega)$ tel que $\theta G(x,s) \leq sg(x,s) + c_2(x)$, pour une constante $C > 0$ indépendante de n, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x,&u_n(x))dx \\ &\leq \frac{1}{\theta-2}\int_\Omega \left[u_n(x)g(x,u_n(x)) - 2G(x,u_n(x))\right]dx + C \\ &= \frac{1}{\mu(\theta-2)}\left[\langle h_n - f, u_n\rangle - 2J(u_n)\right] + C \\ &\leq C\left(1 + \|\nabla u_n\|\right). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Par ailleurs en posant $m(x) := R^{-\theta}\min(1, G(x,R), G(x,-R))$, le lemme 6.6 et (6.7) donnent :

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1 + \|\nabla u_n\|)^{2/\theta}.$$

Finalement comme $a(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$, avec $\alpha > 0$, et que $J(u_n)$ est bornée, on conclut, en supposant d'abord que $\mu < 0$ et en utilisant (6.8) :

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla u_n\|^2 &\leq 2J(u_n) + \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla u_n\| + |\lambda|\|u_n\|^2 \\ &\quad + |\mu|\int_\Omega G(x,u_n(x))dx \\ &\leq C + \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1+\|\nabla u_n\|)^{2/\theta}.\end{aligned}$$

Si $\mu > 0$, comme d'après (6.7) on a $\int_\Omega G(x,u_n(x))dx \geq -C$, on vérifie facilement que la dernière inégalité est encore vraie. Ce qui, en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit, implique que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite $(u_{n_j})_j$ faiblement convergente dans $H_0^1(\Omega)$ et qui, en utilisant le fait que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ est compacte pour $(N-2)r < 2N$, converge fortement dans $L^r(\Omega)$ et presque partout dans Ω (voir proposition **1.**4.11). En procédant comme dans la démonstration du lemme 6.6, on montre que si $r_0 := \min(p_0, (p+1)/p)$, alors $g(\cdot, u_{n_j}(\cdot))$ tend p.p. et dans $L^{r_0}(\Omega)$, donc dans $H^{-1}(\Omega)$, vers $g(\cdot,u(\cdot))$. D'après le lemme **1.**16.1, $g(\cdot,u_{n_j}(\cdot))$ tend vers $g(\cdot,u(\cdot))$ dans $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, donc dans $H^{-1}(\Omega)$. Comme nous l'avons vu plus haut, en désignant par $\widetilde{A}$ le prolongement de A à $H_0^1(\Omega)$, $\widetilde{A}$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ et on a donc :

$$\begin{aligned}u_{n_j} = \widetilde{A}^{-1}&\left[\varepsilon_{n_j} + f + \lambda u_{n_j} + \mu g(\cdot, u_{n_j}(\cdot))\right] \\ &\to \widetilde{A}^{-1}\left[f + \lambda u + \mu g(\cdot,u(\cdot))\right],\end{aligned}$$

c'est à dire que $(u_n)_n$ contient une sous-suite convergente dans $H_0^1(\Omega)$. □

Nous avons dit auparavant que si J est une fonction de classe C^1 bornée inférieurement, en général il n'est pas vrai que pour toute suite minimisante $(u_n)_n$, la dérivée $J'(u_n)$ tend vers zéro. Cependant on a le lemme suivant dû à I. Ekeland [59].

6.8 Lemme (I. Ekeland). *Soient (X,d) un espace métrique complet et J une fonction s.c.i. de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que J est bornée inférieurement et on pose $c := \inf_{x\in X} J(x)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u_ε tel que :*

$$\begin{cases} c \le J(u_\varepsilon) \le c+\varepsilon, \\ \forall x \in X,\ x \neq u_\varepsilon,\ J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x,u_\varepsilon) > 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérons l'épigraphe de J, i.e. l'ensemble :

$$A := \{(x,a) \in X \times \mathbb{R}\ ;\ J(x) \le a\}\,.$$

A est fermé dans $X \times \mathbb{R}$, puisque J est semi-continue inférieurement. Sur $X \times \mathbb{R}$ on définit une relation d'ordre par :

$$(x,a) \preccurlyeq (y,b) \iff a - b + \varepsilon d(x,y) \le 0.$$

On va construire une suite d'ensembles A_n comme suit : pour $x_1 \in X$ fixé tel que

$$c \le J(x_1) \le c+\varepsilon,$$

on pose $a_1 := J(x_1)$ et $A_1 := \{(x,a) \in A\ ;\ (x,a) \preccurlyeq (x_1,a_1)\}$. En supposant que (x_i,a_i) est déterminé et

$$A_i := \{(x,a) \in A\ ;\ (x,a) \preccurlyeq (x_i,a_i)\}\,,$$

pour $i \le n$, on pose $\widetilde{A}_n := \{x \in X\ ;\ \exists a \in \mathbb{R},\ \text{ tel que } (x,a) \in A_n\}$ et $c_n := \inf_{x\in\widetilde{A}_n} J(x)$. Supposons un instant que $a_i > c_i$ pour $i \le n$; il est clair qu'on peut fixer $(x_{n+1},a_{n+1}) \in A_n$ tel que :

$$0 \le J(x_{n+1}) - c_n \le \frac{1}{2}(a_n - c_n), \quad a_{n+1} := J(x_{n+1}). \tag{6.10}$$

On pose ensuite $A_{n+1} := \{(x,a)\ ;\ (x,a) \preccurlyeq (x_{n+1},a_{n+1})\}$ et on vérifie que $A_{n+1} \subset A_n$, et que $c \le c_n \le c_{n+1} := \inf_{\widetilde{A}_{n+1}} J(x)$. D'où, en utilisant les relations (6.10) :

$$0 \le a_{n+1} - c_{n+1} \le a_{n+1} - c_n \le \frac{1}{2}(a_n - c_n) \le 2^{-n}(a_1 - c_1).$$

Par ailleurs, dire que $(x,a) \in A_{n+1}$ signifie que :

$$a - a_{n+1} + \varepsilon d(x,x_{n+1}) \le 0.$$

On en conclut que $\varepsilon d(x,x_n) \le a_{n+1} - a \le a_{n+1} - J(x) \le a_{n+1} - c_{n+1}$ et par conséquent :

$$d(x, x_{n+1}) + |a - a_{n+1}| \leq (1 + \frac{1}{\varepsilon})\, 2^{-n}(a_1 - c_1),$$

ce qui implique que le diamètre de A_{n+1} tend vers zéro. Comme A est complet, il existe un unique $(u, b) \in A$ tel que

$$\{(u, b)\} = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Soit $(x, a) \in A$ tel que $(x, a) \preccurlyeq (u, b)$; alors on a pour tout $n \geq 1$, $(x, a) \preccurlyeq (x_n, a_n)$, ce qui implique que $(x, a) \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$, i.e. $(x, a) = (u, b)$. Cela signifie que (u, b) est minimal dans A, i.e.

$$(x, a) \in A \text{ et } (x, a) \preccurlyeq (u, b) \Longrightarrow (x, a) = (u, b).$$

D'autre part on a $(u, J(u)) \preccurlyeq (u, b)$, et compte tenu du fait que (u, b) est minimal dans A, on conclut que $b = J(u)$. Ainsi on voit que $(u, J(u))$ est minimal dans A, c'est à dire que :

$$(x, a) \in A,\ (x, a) \neq (u, J(u)) \Longrightarrow a - J(u) + \varepsilon d(x, u) > 0.$$

En particulier en prenant $a = J(x)$ et $x \neq u$, et remarquant que $J(u) \leq J(x_1) \leq c + \varepsilon$, on conclut la démonstration du lemme.

S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $c_n = a_n = J(x_n)$, alors $A_n = \{(x_n, a_n)\}$: en effet $(x, a) \in A$ et $(x, a) \preccurlyeq (x_n, a_n)$ signifie, par définition de la relation $\preccurlyeq$:

$$c_n = a_n = J(x_n) \leq J(x) \leq a, \qquad a - a_n + \varepsilon d(x, x_n) \leq 0\ ;$$

on en déduit que $a = a_n$ et $x = x_n$. On pose alors $(u, b) := (x_n, a_n)$ et on vérifie que (u, b) est minimal dans A comme ci-dessus. □

Voici une application du lemme d'Ekeland.

6.9 Corollaire. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. On suppose que J est bornée inférieurement et vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c := \inf_{x\in X} J(x)$. Alors J atteint son minimum c.*

Démonstration. D'après le lemme d'Ekeland, il existe $u_n \in X$ tel que

$$\begin{cases} c \leq J(u_n) \leq c + \dfrac{1}{n}\ , \\ \forall v \in X, \quad J(v) + \dfrac{1}{n}\, \|v - u_n\| \geq J(u_n). \end{cases}$$

En écrivant $J(v) = J(u_n) + \langle J'(u_n), v - u_n\rangle + o(v - u_n)$, on en déduit que :

$$\|J'(u_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

c'est à dire que $J'(u_n) \to 0$, alors que $J(u_n) \to c$. Puisque J satisfait la condition de Palais-Smale, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $u \in X$ tels que $u_{n_k} \to u$. Comme J est de classe C^1, on a donc $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. □

6.10 Exemple. Soient $a(\cdot)$ une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, vérifiant (2.1) et $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable en $x \in \Omega$ et continue en $s \in \mathbb{R}$, satisfaisant les conditions (6.5), (6.6).

Alors pour toute $f \in L^2(\Omega)$ (par exemple), la fonctionnelle

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega [G(x,v(x)) - f(x)v(x)]\,dx,$$

est de classe C^1, satisfait la condition de Palais-Smale (voir proposition 6.7) et est bornée inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$. D'après le corollaire précédent, J atteint son minimum en un point $u \in H_0^1(\Omega)$ et on obtient ainsi une solution de l'équation semilinéaire :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(\cdot)\nabla u) + g(\cdot,u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

7. Le lemme de déformation

Comme nous l'avons vu dans le lemme 5.1, il est possible de déformer un ensemble du type $[c-\varepsilon < J \le c+\varepsilon]$ en un ensemble $[J \le c-\varepsilon]$, pourvu que c ne soit pas valeur critique de J et que l'on puisse construire un flot $\eta(t,x)$ dans la direction opposée au gradient de J. En fait, dans un espace de Banach, on dispose de la notion de *pseudo-gradient* que nous introduisons ici :

7.1 Définition. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X,\mathbb{R})$. Si $u \in X$, on dit que $v \in X$ est un* **pseudo-gradient** *(en abrégé p.g.) de J en u si on a :*

$$\|v\| \le 2\|J'(u)\|, \qquad \langle J'(u), v\rangle \ge \|J'(u)\|^2. \tag{7.1}$$

En désignant par $X_r := \{u \in X\ ;\ J'(u) \neq 0\}$ l'ensemble des points réguliers (i.e. non critiques) de J, une application V de $X_r \longrightarrow X$ est appelée **champ de pseudo-gradient** *de J si V est localement lipschitzienne sur X_r et pour tout $u \in X_r$, $V(u)$ est un pseudo-gradient de J en u.*

Il faut noter qu'il existe d'autres variantes de la définition de pseudo-gradient, en particulier la constante 2 dans (7.1) pourrait être remplacée par une constante $1+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Enfin nous remarquerons que si v_1 et v_2 sont deux p.g. de J en u, pour tout $\theta \in [0,1]$, la combinaison convexe $\theta v_1 + (1-\theta)v_2$ est également un p.g. de J en u.

On notera aussi que si X est un espace de Hilbert et que X' est identifié à X, lorsque $J \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$, on peut prendre comme champ de p.g. tout simplement J'. Cependant, comme on exige que le champ de pseudo-gradient V soit localement lipschitzien sur X_r, même dans le cas où X est un espace de Hilbert, si J est seulement de classe C^1, l'existence d'un champ de p.g. n'est pas évidente. Le résultat suivant est donc digne d'intérêt.

7.2 Lemme. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction non constante. Il existe alors un champ de p.g. de J.*

Démonstration. Soit $u \in X_r$ un point régulier de J. Comme par définition $\|J'(u)\| = \sup_{\|x\|=1} \langle J'(u), x\rangle$ et que $\|J'(u)\| \neq 0$, il existe $x_u \in X$ tel que $\langle J'(u), x_u\rangle > \frac{2}{3}\|J'(u)\|$, et $\|x_u\| = 1$. En posant alors $v := v_u := \frac{3}{2}\|J'(u)\|\, x_u$, on a :

$$\|v_u\| = \frac{3}{2}\|J'(u)\| < 2\|J'(u)\|,$$

$$\langle J'(u), v_u\rangle = \frac{3}{2}\|J'(u)\|\langle J'(u), x_u\rangle > \|J'(u)\|^2,$$

et ainsi v_u est un p.g. de J en u. Comme J' est continue, il existe Ω_u voisinage ouvert de u, $\Omega_u \subset X_r$, tel que pour tout $x \in \Omega_u$, v_u soit un p.g. de J en x. On va ensuite utiliser le résultat topologique suivant qui exprime la *paracompacité* des espaces métriques (voir par exemple N. Bourbaki [24, chapitre IX, § 5, proposition 6 et § 3, proposition 3], J. Dieudonné [58, § 12.6]). Soit Y un espace topologique. Rappelons qu'un recouvrement $(\omega_j)_{j\in I}$ est dit *localement fini* si pour tout $x \in Y$, il existe un voisinage $\omega(x)$ de x tel que $\omega(x) \cap \omega_j = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de $j \in I$. Un recouvrement $(\omega_j)_{j\in I}$ est dit *plus fin* qu'un recouvrement $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ si pour tout $j \in I$ il existe $\alpha_j \in A$ tel que $\omega_j \subset \Omega_{\alpha_j}$. Lorsque $(\omega_j)_{j\in I}$ est un recouvrement ouvert de Y, on dit que $(\theta_j)_{j\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à $(\omega_j)_{j\in I}$ si $0 \leq \theta_j \leq 1$, le support de θ_j est contenu dans ω_j et $\sum_{j\in I} \theta_j(y) = 1$ pour tout $y \in Y$. Si Y est un espace métrique et si chaque θ_j est localement lipschitzienne on dit que la partition est localement lipschitzienne. On a alors le résultat suivant :

> **Théorème.** *Soient (Y, d) un espace métrique et $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de Y. Il existe un recouvrement ouvert $(\omega_j)_{j\in I}$ plus fin que $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$, localement fini et une partition localement lipschitzienne de l'unité $(\theta_j)_{j\in I}$, subordonnée au recouvrement $(\omega_j)_{j\in I}$.*

(Pour une démonstration de ce théorème dans le cas plus simple où Y est séparable, voir *Exercices*). Admettant ce résultat avec $Y := X_r$, et le recouvrement $(\Omega_u)_{u\in X_r}$ défini plus haut, on peut donc trouver un recouvrement localement fini $(\omega_j)_{j\in I}$ et une partition localement lipschitzienne $(\theta_j)_{j\in I}$ de X_r subordonnée à $(\omega_j)_{j\in I}$. Comme chaque ω_j est contenu dans un Ω_{u_j}, pour un $u_j \in X_r$, si on pose :

$$V(z) := \sum_{j\in I} \theta_j(z) v_{u_j},$$

on peut voir que V est bien définie (puisque la somme est finie dans un voisinage de tout point z), localement lipschitzienne et c'est un champ de p.g. de J car là où $\theta_j \neq 0$, v_{u_j} est un pseudo-gradient de J. □

7.3 Lemme. *Si X est un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ est paire et non constante, alors il existe V, un champ de p.g. de J, tel que pour tout $x \in X_r$ on ait $V(-x) = -V(x)$.*

Démonstration. En effet, comme X_r est symétrique par rapport à l'origine et J' est impaire, si V_0 est un champ de p.g. de J, il en est de même de $V_1(x) := -V_0(-x)$. Pour obtenir un champ de p.g. impaire, il suffit de poser $V(x) := \frac{1}{2}(V_0(x) - V_0(-x))$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le lemme de déformation.

7.4 Lemme de déformation. *Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction non constante satisfaisant la condition de Palais-Smale et $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de J. Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une application $\eta \in C(\mathbb{R} \times X, X)$, appelée le* **flot** *associé à J, satisfaisant les conditions suivantes :*

1) *Pour tout $u \in X$, on a $\eta(0, u) = u$.*

2) *Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, on a $\eta(t, u) = u$.*

3) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de X dans X.*

4) *Pour tout $u \in X$, la fonction $t \mapsto J(\eta(t, u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

5) *Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, alors $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.*

6) *Si de plus J est paire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme impair.*

Démonstration. Puisque J satisfait la condition de Palais-Smale et que c n'est pas valeur critique de J, on voit facilement qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ (on prendra en plus $\delta \leq 1$) tels que :

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1], \qquad \|J'(u)\| \geq \delta.$$

On pose $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon_1, \delta^2/8)$, et pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$A := [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0], \qquad B := [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon].$$

Comme $A \cap B = \varnothing$, la fonction $\alpha(x) := d(x, A)/\left(d(x, A) + d(x, B)\right)$ est localement lipschitzienne et vérifie $\alpha = 0$ sur A, $\alpha = 1$ sur B. On notera également que si J est paire, les ensembles A, B sont symétriques par rapport à l'origine et α est une fonction paire.

On considère maintenant V, un champ de pseudo-gradient de J, que l'on choisira impaire, si J est paire. En posant alors

$$W(x) := \alpha(x) \min(1, 1/\|V(x)\|) V(x)$$

pour $x \in X$, on vérifie sans difficulté que W est bien définie sur X, qu'elle est localement lipschitzienne et que $\|W(x)\| \leq 1$. On remarquera également que si J est paire, W est impaire. D'après la théorie générale des équations différentielles (voir aussi *Exercices*), l'équation :

$$\text{(7.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta(t, x)}{dt} = -W(\eta(t, x)) \\ \eta(0, x) = x \end{cases}$$

admet une unique solution $\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$ et en fait $\eta(\cdot, \cdot)$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times X$. De plus comme pour $t, s \in \mathbb{R}$ on a $\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t+s, x)$, on voit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de X dans X, son inverse étant $\eta(-t, \cdot)$. Pour terminer la démonstration du lemme de déformation, nous allons vérifier que η satisfait les conditions 1) à 6).

Les conditions 1) et 3) sont satisfaites de façon évidente. Si

$$u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0],$$

alors $W(u) = 0$, et l'unicité de la solution de (7.2) implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\eta(t, u) = u$: la condition 2) est donc stisfaite. Pour la propriété 4), il suffit de calculer la dérivée de $t \mapsto J(\eta(t, u))$ (ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre X' et X) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\eta(t,u)) &= \langle J'(\eta(t,u)), \frac{d\eta(t,u)}{dt} \rangle \\ &= -\alpha(\eta(t,u)) \min(1, 1/\|V(\eta(t,u))\|) \, \langle J'(\eta(t,u)), V(\eta(t,u)) \rangle \\ &\leq -\alpha(\eta(t,u)) \min(1, 1/\|V(\eta(t,u))\|) \, \|J'(\eta(t,u))\|^2, \end{aligned} \tag{7.3}$$

ce qui montre que $J(\eta(t, u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier 5), considérons $u \in [J \leq c + \varepsilon]$ et remarquons que si pour un $t_0 \in [0, 1[$ on a

$$\eta(t_0, u) \in [J \leq c - \varepsilon],$$

d'après ce que nous venons de voir, $\eta(1, u)$ reste dans $[J \leq c - \varepsilon]$. Supposons donc que pour tout $t \in [0, 1[$, $\eta(t, u)$ soit dans $[c - \varepsilon < J \leq c + \varepsilon]$. Alors d'après l'inégalité (7.3) et le fait que $\|J'(x)\| \leq \|V(x)\| \leq 2\|J'(x)\|$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J'(\eta(t,u)) &\leq \frac{-1}{4} \min(1, 1/\|V(\eta(t,u))\|) \, \|V(\eta(t,u))\|^2 \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{-1}{4} & \text{si } \|V(\eta(t,u))\| \geq 1, \\ \dfrac{-\delta^2}{4} & \text{si } \|V(\eta(t,u))\| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\delta \leq 1$, on en conclut finalement que

$$J(\eta(1,u)) \leq -\delta^2/4 + J(u) \leq -\delta^2/4 + c + \varepsilon \, ,$$

i.e. d'après la définition de ε_0, $J(\eta(1, u)) \leq c - \varepsilon$: cela signifie qu'au plus tard au temps $t = 1$, la trajectoire de $\eta(t, u)$ entre dans l'ensemble $[J \leq c - \varepsilon]$. Pour finir, on remarque que la condition 6) est vérifiée, car W est impaire lorsque J est paire et par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est impaire. □

7.5 Remarque. Il existe d'autres variantes de ce lemme de déformation ; essentiellement, on modifie la construction du flot η en choisissant un autre facteur que

$$\alpha(x) \min(1, 1/\|V(x)\|)$$

dans la définition de la fonction $W(x)$ ou bien en évaluant $\eta(t,u)$ en un temps t qui dépend de u au lieu de prendre $\eta(1,u)$. De même, tout ce que nous venons de faire peut s'adapter au cas d'une fonction J qui est de classe C^1 dans un voisinage de l'ensemble $[c-\varepsilon_0 \leq J \leq c+\varepsilon_0]$. Il existe également une variante de ce lemme, lorsque J est définie sur un ensemble de contraintes (ou une variété) : l'idée centrale est la construction d'un champ de pseudo-gradients tangent ; nous reviendrons plus loin sur cet aspect. □

Voici une version du lemme de déformation (il s'agit du théorème de Morse), qui est un peu plus précise. Rappelons que si $E \subset F$ sont deux parties d'un espace topologique, on dit que E est une *déformation rétracte* de F, s'il existe $\varphi \in C([0,1]\times F, E)$ telle que (ici I désigne l'application identité) :

$$\varphi(0,\cdot) = I, \qquad \forall t \in [0,1], \quad \varphi(t,\cdot)_{|E} = I, \qquad \varphi(1,F) = E.$$

7.6 Théorème (M. Morse). *Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ une fonction non constante satisfaisant la condition de Palais-Smale, et $c \in \mathbb{R}$. Si c n'est pas une valeur critique de J, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $[J \leq c-\varepsilon]$ est une déformation rétracte de $[J \leq c+\varepsilon]$.*

Démonstration. En effet si ε_0 est donné par le lemme 7.4, avec les notations utilisées dans sa démonstration, $\eta(t,x)$ étant la solution de (7.2), il suffit de poser :

$$\varphi(t,u) := \eta\left(\frac{4t}{\delta^2}\left(J(u)-c+\varepsilon\right)^+, u\right).$$

On a évidemment $\varphi(0,\cdot) = I$ et $\varphi(t,u) = u$ si $u \in [J \leq c-\varepsilon]$, alors que $[J \leq c-\varepsilon] \subset \varphi\left(1,[J \leq c+\varepsilon]\right)$. Pour montrer l'inclusion inverse, soient $u \in [c-\varepsilon < J \leq c+\varepsilon]$ et $\tau > 0$ tels que pour $0 \leq t \leq \tau$ on ait $\eta(t,u) \in [c-\varepsilon < J \leq c+\varepsilon]$. Alors comme on l'a fait dans la démonstration de la propriété 5) du lemme 7.4, on déduit de (7.3) que :

$$c-\varepsilon < J(\eta(\tau,u)) \leq J(u) - \frac{\delta^2}{4}\tau,$$

c'est à dire que $\tau < 4\left(J(u-c+\varepsilon)\right)/\delta^2$. Par conséquent pour

$$t_0 := 4\left(J(u-c+\varepsilon)\right)/\delta^2$$

on a $\varphi(1,u) = \eta(t_0,u) \in [J \leq c-\varepsilon]$, ce qui achève la preuve du théorème. □

7.7 Remarque. Sous les hypothèses du théorème 7.6, on peut voir de la même manière que si c n'est pas valeur critique de J, alors pour ε assez petit l'ensemble $[J \geq c+\varepsilon]$ est une déformation rétracte de $[J \geq c-\varepsilon]$. □

Le lemme de déformation est à la base de toutes les méthodes variationnelles utilisant le procédé *inf-sup* ou *min-max*, dont le "principe" est le suivant :

7.8 Principe de min-max. *Soient X un espace de Banach, J de X dans $\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale et $\mathscr{B}$ une famille non vide de parties non vides de X. On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1,\cdot)$ construit dans le lemme de déformation 7.4 respecte $\mathscr{B}$ (i.e. si $A \in \mathscr{B}$, on a $\eta(1,A) \in \mathscr{B}$). On pose :*

$$\widetilde{c} := \inf_{A\in\mathscr{B}} \sup_{v\in A} J(v).$$

Si $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$, alors $\widetilde{c}$ est une valeur critique de J.

Démonstration. En effet si $\widetilde{c}$ n'est pas valeur critique, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit on peut choisir $A \in \mathscr{B}$ tel que $\widetilde{c} \le \sup_{v\in A} J(v) \le \widetilde{c}+\varepsilon$. Mais par hypothèse, en posant $B := \eta(1,A)$ on a d'une part $B \in \mathscr{B}$, et d'autre part $B \subset [J \le \widetilde{c}-\varepsilon]$, ce qui contredit la définition de $\widetilde{c}$. □

7.9 Exemple. Si $\mathscr{B} := \{\,\{x\}\ ;\ x \in X\}$, alors

$$\inf_{A\in\mathscr{B}} \sup_{v\in A} J(v) = \inf_{v\in X} J(v),$$

et on retrouve ainsi le corollaire 6.9 (dans ce cas $\mathscr{B}$ est le plus grand possible). De même en prenant la plus petite classe possible $\mathscr{B} := \{X\}$, alors $\inf_{A\in\mathscr{B}} \sup_{v\in A} J(v) = \sup_{v\in X} J(v)$, et on retrouve le résultat précédent appliqué à $-J$. □

Comme on le voit, ce principe est relativement simple à mettre en œuvre ; cependant, et on le verra dans les exemples que nous traiterons par la suite, pour chaque problème il faudra choisir une classe de parties de X pour que les différentes conditions de ce principe soient satisfaites. Pour ce faire, on regarde en général les invariants topologiques (par exemple le genre, la catégorie, la classe d'homotopie, la classe d'homologie ou de cohomologie) qui sont susceptibles d'être conservés sous l'action du flot (voir par exemple l'exposé de R.S. Palais [127]). De même on notera que l'exigence que le flot η respecte la classe $\mathscr{B}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ est dans certains cas superflue, et peut être allégée.

8. Le théorème du col

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de min-max est le *théorème du col de la montagne* (en anglais *mountain pass theorem*) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration : si on se trouve en un point A dans une *cuvette* à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$, et si on veut aller à un point B située en dehors de la *cuvette* au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il *suffit* de prendre parmi tous les chemins allant de A à B celui qui monte le moins haut. Voici ce résultat que nous appliquerons un peu plus loin à la résolution de certaines équations semilinéaires (nous suivons ici A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz [6]).

8.1 Théorème du col. *Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :*
(i) *il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$;*
(ii) *il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.*
Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\mathscr{B} := \{\varphi([0,1]) \; ; \; \varphi \in C([0,1], X), \; \varphi(0) = 0, \; \varphi(1) = u_0\},$$

et :

$$c := \inf_{A \in \mathscr{B}} \max_{v \in A} J(v),$$

alors c est une valeur critique de J, et $c \geq a$.

Démonstration. Soient $\mathscr{B}$ (qui est évidemment non vide) et c définis comme dans le théorème. Tout d'abord notons que par connexité, pour tout $A \in \mathscr{B}$, l'intersection $A \cap \{u \in X \; ; \; \|u\| = R\}$ est non vide, et par conséquent $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ et finalement $c \geq a$.

Si c n'est pas une valeur critique de J, avec les notations du lemme de déformation 7.4, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver $A \in \mathscr{B}$ tel que

$$A := \varphi([0,1]), \qquad c \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c + \varepsilon.$$

En posant $\psi(\tau) := \eta(1, \varphi(\tau))$ et $B := \psi([0,1])$, on a $B \in \mathscr{B}$. Mais la propriété 5) du lemme de déformation 7.4 implique que $B \subset [J \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit le fait que, par définition de c, on a $\max_{v \in B} J(v) \geq c$. On en conclut que c est une valeur critique de J (et nous avons vu que $c \geq a$). □

8.2 Remarque. Pour faire un lien avec ce que nous avons dit plus haut au sujet des valeurs critiques, à savoir que c est une valeur critique lorsqu'il y a un changement dans la nature topologique des ensembles $[J \leq c + \varepsilon]$ et $[J \leq c - \varepsilon]$, on pourra montrer par le même procédé que :

$$\widetilde{c} := \inf \{b \; ; \; [J \leq b] \text{ contient un chemin continu allant de } 0 \text{ à } u_0\},$$

est une valeur critique de J et que $\widetilde{c} \geq a$. □

8.3 Exemple. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $g(\cdot, \cdot)$ une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Caratheodory et $Au := -\mathrm{div}\,(a(\cdot)\nabla u)$ un opérateur auto-adjoint elliptique comme celui considéré dans (2.2). On rappelle que λ_1, la première valeur propre de A, est caractérisée par :

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \int_\Omega a(x) \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx \; ; \; v \in H_0^1(\Omega), \; \|v\|^2 = 1 \right\}.$$

On suppose que g satisfait les conditions (6.5) (avec, dans un souci de simplification, $b_0 \in L^\infty(\Omega)$), (6.6) et que $G(\cdot, s)$, la primitive de g s'annulant en zéro, vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \text{ tel que si } |s| \leq \delta, \quad |G(\cdot, s)| \leq \varepsilon |s|^2. \tag{8.1}$$

Alors pour $\lambda < \lambda_1$, il existe une solution non identiquement nulle de l'équation :

$$\begin{cases} Au = \lambda u + g(\cdot, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.2}$$

Pour le montrer, on considère

$$J(v) := \frac{1}{2}\left[\langle Av, v\rangle - \lambda \|v\|^2\right] - \int_\Omega G(x, v(x))dx,$$

la fonctionnelle d'énergie associée à cette équation sur $H_0^1(\Omega)$ et on va appliquer le théorème du col. Remarquons que grâce à la condition (8.1) de croissance sur-quadratique en zéro et la croissance sous-critique à l'infini (6.5) (avec ici $b_0 \in L^\infty(\Omega)$), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega G(x, v(x))dx \right| &\leq \int_\Omega |G(x, v(x))|dx \\ &\leq \varepsilon \|v\|^2 + C_\varepsilon \int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx \\ &\leq \varepsilon \|v\|^2 + C_\varepsilon \|\nabla v\|^{p+1} \end{aligned}$$

On en déduit une minoration de J, pourvu que $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$:

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\left[\langle Av, v\rangle - \lambda \|v\|^2\right] - \varepsilon \|v\|^2 - C_\varepsilon \|\nabla v\|^{p+1} \\ &\geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1} \|\nabla v\|^2 - C_\varepsilon \|\nabla v\|^{p+1}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que si $R_0^{p-1} := \alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)/(2\lambda_1 C_\varepsilon)$, et $\|\nabla v\| = R < R_0$, alors pour $R > 0$ il existe $b := b(R) > 0$ tel que $J(v) \geq b$: autrement dit l'origine est un minimum local de J sur $H_0^1(\Omega)$.

Pour trouver un point u_0 de $H_0^1(\Omega)$ tel que $J(u_0) < 0$, rappelons tout d'abord que du fait de la croissance sur-quadratique de G à l'infini (6.6), l'inégalité (6.7) est vraie : pour une fonction $m \in L^\infty(\Omega)$ avec $m > 0$ p.p., on a $G(x, s) \geq m(x)|s|^\theta - C_1$ où $\theta > 2$. Maintenant si $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ (avec $\|\varphi_1\|^2 = 1$) est une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de A, on a $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$ et pour tout $t > 0$ on obtient la majoration :

$$J(t\varphi_1) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)t^2 + C_2 - t^\theta \int_\Omega m(x)|\varphi_1(x)|^\theta dx.$$

Par conséquent pour $t_0 > 0$ assez grand on a $J(t_0\varphi_1) < 0$. Comme d'après la proposition 6.7 la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$, J possède une valeur critique $c \geq b > 0$ et donc un point critique $u \neq 0$ qui est solution de (8.2), grâce au théorème du col. □

Dans l'exemple que nous venons de voir, l'hypothèse $\lambda < \lambda_1$ est importante pour obtenir une minoration de J sur des sphères de rayon assez petit. En réalité

on peut se passer de cette restriction, moyennant une hypothèse sur le signe de $G(\cdot, s)$ et en utilisant une variante plus générale du théorème du col, due à P.H. Rabinowitz [137], que nous présentons ici.

8.4 Théorème. *Soient X un espace de Banach, X_1 un sous-espace de dimension finie et X_2 un sous-espace fermé de X tels que $X = X_1 \oplus X_2$. On considère $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ telle que $J(0) = 0$, vérifiant la condition de Palais-Smale et les deux conditions suivantes :*
(i) *il existe $R > 0$, $a > 0$ tel que si $u \in X_2$ et $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$;*
(ii) *il existe $u_0 \in X_2$ avec $\|u_0\| = 1$, $R_0 > R$ et $R_1 > R$ tels que $J(u) \leq 0$ pour tout $u \in \partial\omega$ où*

$$\omega := \{u_1 + ru_0 \,;\, u_1 \in X_1,\ \|u_1\| \leq R_1,\ 0 \leq r \leq R_0\}\,,$$

et $\partial\omega$ désigne la frontière de ω dans $X_1 \oplus \mathbb{R}u_0$ (noter que ω est un cylindre). Alors J possède une valeur critique $c \geq a$. Plus précisément c est définie par :

$$c := \inf_{A \in \mathscr{B}} \max_{v \in A} J(v)\,,$$

où $\mathscr{B} := \{\varphi(\omega) \,;\, \varphi \in C(\omega, X),\ \varphi(u) = u \ \text{ pour } \ u \in \partial\omega\}$.

Démonstration. Remarquons en premier lieu que $\mathscr{B} \neq \varnothing$, puisque $\omega \in \mathscr{B}$. Pour pouvoir montrer ensuite que $c \geq a$, nous aurons besoin de la propriété suivante :

8.5 Lemme. *Si $A \in \mathscr{B}$, il existe $u \in X_2 \cap A$ tel que $\|u\| = R$.*

Admettant pour un instant ce résultat, on voit donc, par la condition (i), que pour tout $A \in \mathscr{B}$ on a $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ et par conséquent $c \geq a$. Pour montrer que c est une valeur critique, en supposant que ce n'est pas le cas, on peut trouver, par le lemme de déformation 7.4, $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et un flot $\eta(t, \cdot)$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\eta(1, [J \leq c + \varepsilon]) \subset [J \leq c - \varepsilon]$. Alors en prenant $0 < \varepsilon_0 < a/2$, on peut fixer $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $A \in \mathscr{B}$ tels que $c \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c + \varepsilon$. En considérant alors $B := \eta(1, A)$ on a d'une part $\max_{v \in B} J(v) \leq c - \varepsilon$, et d'autre part $B \in \mathscr{B}$, ce qui est en contradiction avec la définition de c. Pour voir que B est un élément de $\mathscr{B}$, notons que $A := \varphi(\omega)$ où $\varphi \in C(\omega, X)$ et $\varphi(v) = v$ si $v \in \partial\omega$. En posant $\psi(v) := \eta(1, \varphi(v))$, on a évidemment $\psi \in C(\omega, X)$ et $B = \psi(\omega)$. Or par la propriété 2) du lemme 7.4 on sait que si $v \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, alors $\eta(1, v) = v$, et dans le cas actuel, par la condition (ii) on sait que si $v \in \partial\omega$ on a $v = \varphi(v)$ et $J(v) \leq 0 < c - \varepsilon_0$. Par conséquent $\psi(v) = v$, pour tout $v \in \partial\omega$ et ainsi $B \in \mathscr{B}$.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous reste à montrer le lemme 8.5. Soit donc $A \in \mathscr{B}$ et désignons par Pr la projection de X sur X_1. On doit résoudre l'équation :

$$\text{(8.3)} \qquad \text{trouver } u \in A \text{ tel que } \quad \Pr(u) = 0, \qquad \|u - \Pr(u)\| = R.$$

Si $A := \varphi(\omega)$, on considère la fonction $F : X_1 \oplus \mathbb{R}u_0 \longrightarrow X_1 \oplus \mathbb{R}u_0$ définie par :

$$F(x) := \Pr(\varphi(x)) + \|\varphi(x) - \Pr(\varphi(x))\|u_0.$$

La résolution de (8.3) équivaut à trouver $x \in \omega$ tel que $F(x) = Ru_0$. De manière évidente on voit que $F \in C(X_1 \oplus \mathbb{R}u_0, X_1 \oplus \mathbb{R}u_0)$ et que $F = I$, l'application identité, sur $\partial\omega$; il est tout aussi clair que $Ru_0 \notin \partial\omega$. En utilisant le degré topologique de Brouwer, par la proposition **2.**2.9 on conclut que :

$$\deg(F, \omega, Ru_0) = \deg(I, \omega, Ru_0) = 1,$$

et par la proposition **2.**2.5 on déduit que l'équation $F(x) = Ru_0$ admet au moins une solution $x \in \omega$ et le lemme 8.5, ainsi que le théorème 8.4 sont prouvés. □

8.6 Remarque. Le théorème du col 8.1 est un cas particulier du théorème 8.4, en prenant $X_1 := \{0\}$. Le lemme 8.5 exprime le fait que le bord de ω (ou de manière plus générale le bord d'un élément de $\mathscr{B}$) et la sphère S_R de rayon R de X_2 sont *enlacés*, de sorte que toute surface reposant sur $\partial\omega$ rencontre cette sphère. Dans un vocabulaire imagé, on dit que tout élément de $\mathscr{B}$ a une *liaison* (en anglais *link*) avec la sphère S_R.

Dans la pratique, pour utiliser le théorème du col 8.1, on montre que l'origine est un point de minimum local, sans être global ; on montre ensuite que J possède un point critique distinct de l'origine. De ce point de vue, le théorème 8.4 a l'avantage de ne pas exiger une telle situation : en effet il se peut très bien que l'origine soit un point de minimum local pour la restriction de J à X_2, sans être un point de minimum local de J. Pour de tels exemples dans les problèmes semilinéaires voir *Exercices*. □

8.7 Exemple. Avec les hypothèses et notations de l'exemple 8.3, supposons que pour un entier $k \geq 1$ on ait $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ où les $(\lambda_n)_n$ désignent les valeurs propres de l'opérateur A considéré en (2.2). En supposant que g vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \text{ p.p. sur } \Omega, \qquad G(x,s) \geq 0\,, \tag{8.4}$$

(ce qui est le cas si on a par exemple $sg(x,s) \geq 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$), alors la fonctionnelle J admet une valeur critique $c > 0$. En effet, en désignant par φ_n une fonction propre associée à λ_n telle que $\|\varphi_n\|^2 = 1$, soient les sous-espaces $X_1 := \mathbb{R}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ et $X_2 := X_1^\perp$ l'orthogonal de X_1 dans $H_0^1(\Omega)$. Pour vérifier que la condition (i) est satisfaite, on montre, comme nous l'avons fait à l'exemple 8.3, que :

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\left[\langle Av, v\rangle - \lambda\|v\|^2\right] - \varepsilon\|v\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla v\|^{p+1},$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Mais si $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_{k+1}$, comme pour $v \in X_2$ on a $\langle Av, v\rangle \geq \lambda_{k+1}\|v\|^2$, on conclut que pour de tels v on a

$$J(v) \geq \frac{\alpha(\lambda_{k+1} - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_{k+1}}\|\nabla v\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla v\|^{p+1}.$$

Par conséquent si $R_*^{p-1} := \alpha(\lambda_{k+1} - \lambda - 2\varepsilon)/(2\lambda_{k+1}C_\varepsilon)$, et $v \in X_2$ est tel que $\|\nabla v\| = R$, pour $0 < R < R_*$, on a $J(v) \geq b := b(R) > 0$.

Pour vérifier la condition (ii), remarquons que pour $v := v_1 + t\varphi_{k+1}$ avec $v_1 \in X_1$ et $t \geq 0$ on a :

$$\langle Av, v\rangle \leq (\lambda_k - \lambda)\|v_1\|^2 + (\lambda_{k+1} - \lambda)t^2,$$

et par conséquent d'après la condition (8.4), pour tout $v_1 \in X_1$ on a $J(v_1) \leq 0$: en particulier pour tous $R_0, R_1 > R$, si ω est défini comme dans le théorème 8.4 et si v appartient au bord inférieur du cylindre, on a $J(v) \leq 0$ (le bord inférieur étant contenu dans X_1). Par ailleurs, si $v_1 \in X_1$ est fixé, en utilisant l'estimation (6.7) on voit que pour une constante C_1 et une fonction $m \in L^\infty(\Omega)$ et $m > 0$ p.p., on a :

$$J(v_1 + t\varphi_{k+1}) \leq \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda)t^2 + C_1 - \int_\Omega m(x)|v_1(x) + t\varphi_{k+1}(x)|^\theta dx. \tag{8.5}$$

Comme $\theta > 2$, on peut fixer (voir *Exercices*) $R_1 > R$ assez grand pour que, si $v_1 \in X_1$ et $\|\nabla v_1\| = R_1$, alors pour tout $t \geq 0$ le second membre de (8.5) soit négatif : de cette façon J est négative ou nulle sur le bord latéral du cylindre ω. Enfin, pour le bord supérieur de ce cylindre, R_1 étant ainsi fixé, on peut trouver de la même manière $R_0 > R$ assez grand tel que pour tout $v_1 \in X_1$, avec $\|\nabla v_1\| \leq R_1$, on ait :

$$\begin{aligned} &J(v_1 + R_0\varphi_{k+1}) \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda)R_0^2 + C_1 - \int_\Omega m(x)|v_1(x) + R_0\varphi_{k+1}|^\theta dx \\ &\qquad\qquad \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement on voit que J satisfait les conditions du théorème 8.4, et possède donc un point critique autre que zéro, et le problème :

$$\begin{cases} Au = \lambda u + g(\cdot, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.6}$$

admet une solution non identiquement nulle pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pourvu que g vérifie les conditions (6.5), (6.6), (8.1), (8.4). □

8.8 Remarque. On peut aborder par les mêmes techniques la résolution de problèmes du type $Au = \lambda\rho(\cdot)u + g(\cdot, u)$ où, par exmple, ρ est dans $L^\infty(\Omega)$. Pour d'autres exemples voir *Exercices*. □

9. Points critiques multiples

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \leq 3$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons vu que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u^3 = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u \not\equiv 0, & \end{array} \right. \tag{9.1}$$

admet une solution si, et seulement si, $\lambda > \lambda_1$, la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet. On sait que les solutions de (9.1) peuvent être recherchées comme points critiques de

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega v(x)^4 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega v(x)^2 dx$$

sur $H_0^1(\Omega)$, et que l'équation (9.1) admet une solution positive obtenue comme point de minimum de J.

En fait, en utilisant la notion de genre et le lemme de déformation, on peut montrer que si $\lambda > \lambda_k$ (k-ème valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet), alors (9.1) admet au moins $2k$ solutions. En effet soit pour $j \geq 1$, S^{j-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^j$ et :

$$\begin{aligned} &c_j := \inf_{A \in \mathscr{B}_j} \max_{v \in A} J(v), \\ &\text{où } \mathscr{B}_j := \left\{ h(S^{j-1}) \,;\; h \in C(S^{j-1}, H_0^1(\Omega)),\ h \text{ impaire} \right\}. \end{aligned}$$

Noter que, comme J est une fonction paire, on a

$$c_1 = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

On va montrer que si $c_j < 0$ alors c_j est valeur critique de J. En effet on sait que J vérifie la condition de Palais-Smale ; si $c_j < 0$ et c_j n'est pas valeur critique de J, soient $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta(t,x)$ le flot *impair* en x associé à J par le lemme 7.4. En prenant $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_0, |c_j|/2)$ et $A := h(S^{j-1}) \in \mathscr{B}_j$ tels que

$$c_j \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c_j + \varepsilon < 0,$$

on sait que d'une part $\eta\left(1, [J \leq c_j + \varepsilon]\right) \subset [J \leq c_j - \varepsilon]$, et que d'autre part si $B := \eta(1, A) = (\eta(1,\cdot) \circ h)(S^{j-1})$ alors $B \in \mathscr{B}_j$, puisque $\eta(1,\cdot)$ est impair. On aurait donc $c_j \leq \max_{v\in B} J(v) \leq c_j - \varepsilon$, ce qui est absurde (on notera qu'on utilise l'information $c_j < 0$ pour être sûr que le point critique ainsi obtenu n'est pas zéro : en effet si $A \in \mathscr{B}_j$ et $\max_{v\in A} J(v) < 0$, alors $0 \notin A$).

Montrons maintenant que si $j \leq k$, alors $c_j < 0$. En effet, soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions propres du laplacien avec condition de Dirichlet, où $(\varphi_n|\varphi_m) = \delta_n^m$. Si, pour $\varepsilon > 0$, A_ε désigne la sphère de rayon ε de l'espace $\mathbb{R}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j\}$, on a $A_\varepsilon \in \mathscr{B}_j$ et il

existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que, pour $v := \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \varphi_i \in A_\varepsilon$:

$$J(v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j}(\lambda_i - \lambda)\alpha_i^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{j}\alpha_i\varphi_i(x)\right|^4 dx$$
$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2}(\lambda_j - \lambda) + C\varepsilon^4.$$

On en conclut que si $\lambda_j < \lambda$, alors $c_j \leq \max_{v\in A_\varepsilon} J(v) < 0$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Comme J est paire, à chaque $c_j < 0$ correspondent (au moins) deux solutions ; on va montrer qu'il y a au moins $2k$ solutions pour le problème (9.1). S'il y a k valeurs distinctes $c_j < 0$, il n'y a rien à montrer. En revanche si, pour un entier $n \geq 1$, on a

$$c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+n} < 0,$$

alors il y a une infinité de solutions : en effet on peut montrer que l'ensemble $K(c_j) := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ J(u) = c_j,\ J'(u) = 0\right\}$ est de genre $\gamma(K(c_j)) \geq n + 1$ (on notera que $K(c_j)$ est fermé dans $H_0^1(\Omega)$, symétrique par rapport à l'origine et ne contient pas zéro, donc son genre est bien défini).

Cependant au lieu de montrer cette propriété pour l'exemple (9.1), nous allons énoncer et montrer le résultat suivant dû à D.C. Clark [41]. Rappelons (voir paragraphe § **2.**4) que si X est un espace de Banach, nous avons désigné par $s(X)$ l'ensemble des parties $A \subset X$ qui sont fermées, symétriques (i.e. $-A = A$) et ne contiennent pas l'origine ; si $A \in s(X)$, son genre est noté $\gamma(A)$. Pour un entier $n \geq 1$ on posera :

$$\Gamma_n := \{A \in s(X)\ ;\ \gamma(A) \geq n\}. \tag{9.2}$$

Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, et si c est une valeur critique de J, rappelons la notation :

$$K(c) := \{u \in X\ ;\ J(u) = c,\ \text{ et }\ J'(u) = 0\}.$$

9.1 Théorème. *Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction* **paire** *satisfaisant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$, et pour $j \geq 1$ on définit :*

$$c_j := \inf_{A\in\Gamma_j}\sup_{v\in A} J(v).$$

Alors $c_j \leq c_{j+1}$, et si $-\infty < c_j < 0$, c_j est une valeur critique de J. De plus, si pour un entier $n \geq 1$, on a $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+n}$ et si $-\infty < c_j < 0$, alors $\gamma(K(c_j)) \geq n + 1$.

Démonstration. Le fait que la suite c_j est croissante est évidente. Si $-\infty < c_j < 0$ n'est pas valeur critique, $\varepsilon_0 > 0$ étant donné par le lemme de déformation 7.4, pour $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_0, |c_j|/2)$, il existe $A \in \Gamma_j$ tel que $c_j \leq \sup_{v\in A} J(v) \leq c_j + \varepsilon < 0$. Alors le flot $\eta(t, x)$ étant comme dans le lemme et $B := \eta(1, A)$, on sait que $B \subset [J \leq c_j - \varepsilon]$, et par conséquent B ne contient pas l'origine. Comme $\eta(1, \cdot)$ est un homéomorphisme, on a $B \in \Gamma_j$; on aurait donc $c_j \leq \sup_{v\in B} J(v) \leq c_j - \varepsilon$, ce qui est impossible.

Si $c_j = c_{j+n}$ pour un entier $n \geq 1$, puisque J vérifie la condition de Palais-Smale, $K := K(c_j)$ est compact et par conséquent $\gamma(K)$ est fini et il existe $\tau > 0$ assez petit, tel que si

$$\omega := \{v \in X \,;\, \mathrm{dist}(v, K) < \tau\}$$

et $\widetilde{K} := \overline{\omega}$, on ait $\widetilde{K} \in s(X)$ et $\gamma(\widetilde{K}) = \gamma(K)$ (voir théorème **2.**4.4). Supposons que $\gamma(\widetilde{K}) \leq n$; J vérifiant la condition de Palais-Smale, on peut trouver $\varepsilon_1 > 0$ assez petit et $\delta > 0$ (avec $\delta \leq 1$) tels que :

$$\forall v \in [J \leq c_j + \varepsilon_1] \setminus ([J < c_j - \varepsilon_1] \cup \omega)\,, \qquad \|J'(v)\| \geq \delta.$$

En prenant $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_1, \delta^2/8, |c_j|/2)$ assez petit et suivant la démarche de la démonstration du lemme 7.4, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on choisit $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ une fonction localement lipschitzienne et paire telle que

$$\begin{aligned} &\alpha(v) = 0 \ \text{ pour } \ v \in [J \leq c_j - \varepsilon_0] \cup \widetilde{K} \cup [J \geq c_j + \varepsilon_0], \\ &\alpha(v) = 1 \ \text{ pour } \ v \in [c_j - \varepsilon \leq J \leq c_j + \varepsilon] \setminus \omega. \end{aligned} \tag{9.3}$$

En considérant V un champ de pseudo-gradient impair de J, on construit le flot $\eta(t,x)$ exactement comme en (7.2) et on conclut que

$$\eta\,(1, [J \leq c_j + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c_j - \varepsilon].$$

Or on peut choisir $A \in \Gamma_{j+n}$ tel que $c_j \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq c_j + \varepsilon$; d'après la propriété (vii) du théorème **2.**4.4 on sait que :

$$\gamma(\overline{A \setminus \widetilde{K}}) \geq \gamma(A) - \gamma(\widetilde{K}) \geq j + n - n,$$

et puisque $\eta(1, \cdot)$ est un homéomorphisme, en posant

$$B := \eta(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}}),$$

comme $J(0) = 0$ et $\sup_{v \in B} J(v) \leq c_j - \varepsilon < 0$, l'origine n'appartient pas à B, qui est donc un élément de $s(X)$: on en déduit que $\gamma(B) \geq j$. On a donc $c_j \leq \sup_{v \in B} J(v) \leq c_j - \varepsilon$, ce qui n'est pas possible. □

On peut tenter d'appliquer ce type d'argument pour traiter le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^3 & \text{dans } \ \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega \\ \quad u \not\equiv 0, \end{cases} \tag{9.4}$$

(où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $N \leq 3$). Mais ici les solutions de l'équation (9.4) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle :

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^2 - \lambda v(x)^2 \right] dx - \frac{1}{4} \int_\Omega v(x)^4 dx,$$

sur $H_0^1(\Omega)$. Or on peut voir facilement qu'ici pour tout $j \geq 1$ on a

$$\inf_{A \in \mathscr{B}_j} \sup_{v \in A} E(v) = -\infty.$$

On a alors la possibilité de chercher une fonctionnelle J bornée inférieurement, satisfaisant la condition de Palais-Smale et dont les points critiques sont (ou permettent de construire) des points critiques de E. C'est une approche que nous aborderons plus tard lors de l'étude de fonctionnelles avec contraintes. On peut aussi essayer de trouver une version "*multiple*" du théorème du col. Cela est possible comme on le voit dans le théorème suivant :

9.2 Théorème. *Soient X un espace de Banach de dimension infinie et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction satisfaisant la condition de Palais-Smale. On suppose que J est* **paire** *et vérifie les deux conditions suivantes :*
(i) *$J(0) = 0$ et il existe $R > 0$, $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$;*
(ii) *si $X_1 \subset X$ est de dimension finie, alors $\{u \in X_1 \ ; \ J(u) \geq 0\}$ est borné.*
Alors J possède une suite non bornée de valeurs critiques.

Démonstration. On doit construire une classe d'ensembles $\mathscr{B}_j$ stable par le flot de J et telle que $\inf_{A \in \mathscr{B}_j} \sup_{v \in A} J(v)$ soit finie. Pour cela on introduit les notations suivantes ; S étant la sphère unité de X, on note $\mathfrak{s}(X)$ l'ensemble des parties non vides, symétriques et *compactes* de X et :

$$C_{_H}(X) := \{\varphi \in C(X, X) \ ; \ \varphi \text{ homéomorphisme impair}\}$$

$$\mathscr{F}_+ := \{\varphi(S) \ ; \ \varphi \in C_{_H}(X), \quad \varphi(S) \subset [J > 0]\}, \tag{9.5}$$

$$\mathscr{B}_j := \{A \in \mathfrak{s}(X) \ ; \ \forall M \in \mathscr{F}_+, \ \gamma(A \cap M) \geq j\}. \tag{9.6}$$

On notera que $\mathscr{F}_+ \neq \varnothing$, car en posant $\varphi(v) := Rv$, on a $\varphi(S) \in \mathscr{F}_+$. Pour montrer le théorème, nous allons énoncer les diverses propriétés utiles des ensembles $\mathscr{B}_j$ dans le lemme qui suit, et nous le prouverons un peu plus loin :

9.3 Lemme. *Sous les hypothèses du théorème 9.2, $\mathscr{F}_+$ et $\mathscr{B}_j$ étant définis en (9.5) et (9.6), on a les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout $j \geq 1$, $\mathscr{B}_j \neq \varnothing$ et $\mathscr{B}_{j+1} \subset \mathscr{B}_j$.*

2) *Si $A \in \mathscr{B}_{j+n}$ et $B \in s(X)$ vérifie $\gamma(B) \leq n$, alors $\overline{A \setminus B} \in \mathscr{B}_j$.*

3) *Si $\psi : X \longrightarrow X$ est un homéomorphisme impair tel que*

$$\psi^{-1}([J > 0]) \subset [J > 0],$$

alors pour tout $A \in \mathscr{B}_j$ on a $\psi(A) \in \mathscr{B}_j$.

En supposant le lemme établi, on pose :

$$c_j := \inf_{A \in \mathscr{B}_j} \max_{v \in A} J(v), \tag{9.7}$$

et on montre que c_j est valeur critique de J. Cependant comme on a un résultat de multiplicité supplémentaire intéressant, nous énoncerons la proposition :

9.4 Proposition. *Sous les hypothèses du théorème 9.2 :*

1) *la suite $(c_j)_j$ définie par (9.7) est croissante et $c_j \geq a$;*

2) *chaque c_j est une valeur critique de J et si pour un entier $n \geq 0$ on a $c_j = c_{j+n}$, alors $\gamma(K(c_j)) \geq n+1$;*

3) *de plus $\lim_{j\to\infty} c_j = +\infty$.*

(Rappelons que $K(c_j) := \{u \in X\ ;\ J(u) = c_j,\ J'(u) = 0\}$). Naturellement, puisque la suite $\mathscr{B}_j$ est décroissante, la suite c_j est croissante. Par ailleurs si $A \in \mathscr{B}_j$, comme d'après l'ypothèse (i) du théorème 9.2, S_R, la sphère de rayon R, est un élément de $\mathscr{F}_+$, on a $A \cap S_R \neq \varnothing$ et par conséquent $\max_{v\in A} J(v) \geq a$ et $c_j \geq a$; la propriété 1) est ainsi prouvée.

Montrons la propriété 2). Soit $K := K(c_j)$; comme J satisfait la condition de Palais-Smale, K est compact donc de genre fini. Si $\gamma(K) \leq n$ on peut trouver $\tau > 0$ assez petit tel que si

$$\omega := \{v \in X\ ;\ \mathrm{dist}(v, K) < \tau\}\,,$$

et $\widetilde{K} := \overline{\omega}$, on ait $\widetilde{K} \in s(X)$ et $\gamma(\widetilde{K}) = \gamma(K)$ (ici on utilise le théorème **2.**4.4 et le fait que $c_j \geq a > 0$ pour être sûr que $0 \notin \widetilde{K}$). Ensuite, exactement comme dans la démonstration du théorème 9.1, on trouve $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ assez petits tels que :

$$\forall v \in [J \leq c_j + \varepsilon_1] \setminus ([J < c_j - \varepsilon_1] \cup \omega)\,, \qquad \|J'(v)\| \geq \delta.$$

En prenant $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_1, \delta^2/8, c_j/2)$ assez petit et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on choisit une fonction α comme en (9.3) et on construit le flot impair η de sorte que :

$$\eta\,(1, [J \leq c_j + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c_j - \varepsilon].$$

Si $A_0 \in \mathscr{B}_{j+n}$ est tel que $c_j \leq \max_{v\in A_0} J(v) \leq c_j + \varepsilon$, on définit $A := \overline{A_0 \setminus \widetilde{K}}$; en utilisant la propriété 2) du lemme 9.3, on sait que $A \in \mathscr{B}_j$. D'autre part, en posant $\psi(v) := \eta(1, v)$, on sait que $\psi^{-1}(v) = \eta(-1, v)$ et comme $t \mapsto J(\eta(t, v))$ est décroissante par construction, si $J(v) > 0$, alors $\psi^{-1}(v) \in [J(v) > 0]$. On en déduit, d'après la propriété 3) du lemme 9.3, que $B := \psi(A) \in \mathscr{B}_j$. On a donc d'une part $c_j \leq \max_{v\in B} J(v)$ et d'autre part $B \subset [J \leq c_j - \varepsilon]$, ce qui est impossible.

Pour montrer que c_j tend vers $+\infty$, comme il s'agit d'une suite croissante, il suffit de montrer qu'on ne peut avoir :
(i) pour un entier $m \geq 1$, $c_j = c_m$ pour tout $j \geq m$;
(ii) pour un $c > 0$, $c_j \uparrow c$ lorsque $j \uparrow +\infty$.

La possibilité **(i)** est exclue, puisque dans ce cas on aurait, d'après la propriété 2) de la proposition 9.4, $\gamma(K(c_m)) = +\infty$, alors que $K(c_m)$ est compact et donc de genre fini. Si la possibilité **(ii)** n'était pas exclue soit :

$$K := \{u \in X\ ;\ c_1 \leq J(u) \leq c, \quad J'(u) = 0\}\,.$$

Comme J satisfait la condition de Palais-Smale, K est compact donc de genre fini, soit $\gamma(K) =: n$. En raisonnant comme plus haut, on peut trouver $\tau > 0$ assez petit tel que si

$$\omega := \{v \in X \,;\, \mathrm{dist}(v, K) < \tau\}$$

et $\widetilde{K} := \overline{\omega}$, on ait $\widetilde{K} \in s(X)$ et $\gamma(\widetilde{K}) = n$. En fixant $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ comme ci-dessus et $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_1, \delta^2/8, c_1/2, (c - c_1)/2)$, puis $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on construit le flot η de sorte que $\eta\,(1, [J \leq c + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c - \varepsilon]$.

Soit maintenant $j \geq 1$ un entier tel que $c_j > c - \varepsilon$; on peut prendre $A_0 \in \mathscr{B}_{j+n}$ tel que $\max_{v \in A_0} J(v) \leq c + \varepsilon$, et en posant $A := A_0 \setminus \omega$ on sait, grâce au lemme 9.3, que $A \in \mathscr{B}_j$ et aussi $B := \eta(1, A) \in \mathscr{B}_j$: on a donc $c_j \leq \max_{v \in B} J(v)$ et $B \subset [J \leq c - \varepsilon]$, ce qui est impossible puisque $c - \varepsilon < c_j$. □

La proposition 9.4, et par conséquent le théorème 9.2 sont ainsi prouvés, si on montre le lemme 9.3.

Démonstration du lemme 9.3. Le fait que $\mathscr{B}_{j+1} \subset \mathscr{B}_j$ est clair. Pour voir que $\mathscr{B}_j \neq \varnothing$, soit $X_1 \subset X$ un sous-espace de dimension finie j de X. Si B_r est la boule fermée de rayon r de X et si on pose $A := X_1 \cap B_r$, alors pour $r > 0$ assez grand on a $A \in \mathscr{B}_j$. En effet $X_1 \cap [J > 0]$ est borné d'après l'hypothèse (ii) du théorème 9.2, et si on fixe $r > 0$ assez grand, $X_1 \cap [J > 0] \subset A$; par ailleurs si $M := \varphi(S) \in \mathscr{F}_+$, on a $M \subset [J > 0]$ et $M \cap X_1 \subset A$. On a ainsi :

$$j \geq \gamma(A \cap M) \geq \gamma(X_1 \cap M) \geq \gamma\left(\partial\left(X_1 \cap \varphi(B_1)\right)\right) = j,$$

car $X_1 \cap \varphi(B_1)$ est un voisinage symétrique et fermé de l'origine dans X_1, et par conséquent sa frontière est de genre j (= dim X_1, voir exemple **2.**4.3) ; d'autre part la frontière $\partial\left(X_1 \cap \varphi(B_1)\right)$ est contenue dans $X_1 \cap M = X_1 \cap \varphi(S)$. Finalement on a donc pour tout $M \in \mathscr{F}_+$, $\gamma(A \cap M) = j$, ce qui prouve bien que $A \in \mathscr{B}_j$.

Pour montrer 2), on remarque que si $A \in \mathscr{B}_{j+n}$ et $\gamma(B) \leq n$, pour $M \in \mathscr{F}_+$, on a $(A \setminus B) \cap M = A \cap M \cap B^c$ et

$$\gamma\left(\overline{A \setminus B} \cap M\right) = \gamma\left(\overline{(A \cap M) \setminus B}\right) \geq \gamma(A \cap M) - \gamma(B) \geq j.$$

Enfin, si ψ est un homéomorphisme impair tel que $\psi^{-1}\left([J > 0]\right) \subset [J > 0]$, on remarque que pour $A \in \mathscr{B}_j$, $\psi(A)$ est symétrique et compact et $\gamma\left(\psi(A) \cap M\right) = \gamma\left(A \cap \psi^{-1}(M)\right)$ pour tout $M \in \mathscr{F}_+$. Mais comme $M = \varphi(S) \subset [J > 0]$ et que ψ^{-1} conserve l'ensemble $[J > 0]$, on a $\widetilde{M} := \psi^{-1}(M) = \psi^{-1} \circ \varphi(S) \in \mathscr{F}_+$. Par conséquent $\gamma\left(A \cap \psi^{-1}(M)\right) \geq j$ et $\psi(A) \in \mathscr{F}_+$. □

9.5 Remarque. On peut donner une autre démonstration du fait que si J satisfait les conditions du théorème 9.2, alors J possède une valeur critique $\widetilde{c} \geq a > 0$, en procédant de la manière suivante : soit $(F_j)_{j \geq 1}$ une suite de sous-espaces vectoriels de X telle que dim $F_j = j$ et $F_j \subset F_{j+1}$. D'après la condition (ii) du théorème 9.2, on sait qu'il existe $R_j > 0$ tel que :

$$\forall v \in F_j, \quad \|v\| \geq R_j \Longrightarrow J(v) \leq 0.$$

On peut aussi prendre $R_j < R_{j+1}$. On désignera par B_j la boule fermée de rayon R_j de F_j. On introduit alors la classe $\mathscr{M}_j$ de parties de X par :

$$\mathscr{M}_j := \{\varphi(B_j) \ ; \ \varphi \in C(B_j, X), \ \forall v \in B_j \cap [J \leq 0], \quad \varphi(v) = v\}. \tag{9.8}$$

Dans ces conditions on peut montrer le lemme suivant :

9.6 Lemme. *Sous les hypothèses et notations du théorème 9.2, $\mathscr{M}_j$ étant défini comme en (9.8), on pose :*

$$\widetilde{c}_j := \inf_{A \in \mathscr{M}_j} \max_{v \in A} J(v).$$

Alors pour tout $j \geq 1$ on a $\widetilde{c}_{j+1} \geq \widetilde{c}_j \geq a$, et chaque $\widetilde{c}_j$ est une valeur critique de J.

Pour la démonstration voir *Exercices*. Nous devons cependant faire remarquer, que même si dans certains cas on peut montrer que la suite $\widetilde{c}_j$ est non bornée, en général on ne peut pas établir le résultat de multiplicité de la proposition 9.4. □

9.7 Exemple. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, A un opérateur elliptique du second ordre comme dans (2.2), $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions de la proposition 6.7 avec $b_0 \in L^\infty(\Omega)$ pour simplifier, ainsi que la condition (8.1) (comme exemple typique prendre Ω un ouvert borné régulier, $Au := -\Delta u$, pour $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $g(x,s) := \rho(x)|s|^{p-1}s$ avec $p > 1$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $\rho > 0$ p.p. et $(N-2)p < N+2$). Alors pour tout $\lambda < \lambda_1$ (première valeur propre de A), l'équation :

$$\begin{cases} Au = \lambda u + g(\cdot, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.9}$$

admet une infinité de solutions. En effet d'après les conditions de croissance imposée à $G(\cdot, s)$ en zéro et à l'infini, pour $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$, et une constante $C_\varepsilon > 0$ on a :

$$\int_\Omega G(x, v(x))dx \leq \varepsilon \int_\Omega |v(x)|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx. \tag{9.10}$$

D'autre part si

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left[a(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x) - \lambda |v(x)|^2\right] dx - \int_\Omega G(x, v(x))dx,$$

on sait d'après la proposition 6.7 que J vérifie la condition de Palais-Smale et on déduit de l'inégalité (9.10) que (on utilise ici l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg $\|v\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|$) :

$$J(v) \geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1} \|\nabla v\|^2 - C(\varepsilon)\|\nabla v\|^{p+1},$$

ce qui montre que si $\|\nabla v\| = R$ et que $R > 0$ est assez petit, alors il existe $b(R) > 0$ tel que $J(v) \geq b(R)$, de sorte que J satisfait la condition (i) du théorème 9.2. Pour voir que la condition (ii) est également satisfaite, rappelons que J vérifie (6.7) et que par conséquent si X_1 est un sous-espace vectoriel de dimension finie de X et si $v \in X_1$ est tel que $J(v) \geq 0$, alors pour des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ et une fonction $m > 0$ p.p. sur Ω on a :

$$0 \leq J(v) \leq C_1 \|\nabla v\|^2 - C_2 \int_\Omega m(x)|v(x)|^\theta dx + C_3.$$

Comme sur l'espace de dimension finie X_1 toutes les normes sont équivalentes, on peut trouver une constante $C_4 > 0$ telle que pour tout $v \in X_1$ on ait $\|\nabla v\|^\theta \leq C_4 \int_\Omega m(x)|v(x)|^\theta dx$ et par conséquent, pour $v \in X_1$ tel que $J(v) \geq 0$, on doit avoir :

$$\int_\Omega m(x)|v(x)|^\theta dx \leq C_5 \left(\int_\Omega m(x)|v(x)|^\theta dx \right)^{2/\theta} + C_6,$$

ce qui, sachant que $\theta > 2$, implique que $\int_\Omega m(x)|v(x)|^\theta dx$ est bornée et par conséquent l'ensemble $X_1 \cap [J \geq 0]$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$; ainsi la condition (ii) du théorème 9.2 est vérifiée. □

9.8 Remarque. On voit de nouveau, comme dans l'exemple que nous avons donné en application du théorème du col 8.1, que la condition $\lambda < \lambda_1$ intervient pour que l'hypothèse (i) du théorème 9.2 soit vérifiée. Comme nous l'avons vu au théorème 8.4, on peut modifier légèrement la construction des valeurs critiques c_j pour se passer de cette condition technique. On dispose en réalité de la version suivante du théorème 9.2. (voir P.H. Rabinowitz [137], [138, theorem 9.12], [136], V. Benci [16]).

9.9 Théorème. *Soient X un espace de Banach, X_0 un sous-espace vectoriel de dimension finie et X_2 un sous-espace fermé tels que $X = X_0 \oplus X_2$. On considère $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ telle que $J(0) = 0$, satisfaisant la condition de Palais-Smale ainsi que les deux conditions suivantes :*
(i) *il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $v \in X_2$ et $\|v\| = R$ alors $J(v) \geq a$;*
(ii) *si $X_1 \subset X$ est de dimension finie, alors $\{v \in X_1 \ ; \ J(v) \geq 0\}$ est borné.*
Alors J possède une suite non bornée de valeurs critiques.

Démonstration. Supposons que $\dim X_0 =: m$, et considérons une suite de sous-espaces $(F_j)_{j \geq 1}$ telle que $X_0 \subset F_j \subset F_{j+1}$ et $\dim F_j = m + j$. On sait qu'il existe $R_j > 0$ tel que si $v \in F_j$ et $\|v\| \geq R_j$ alors $J(v) \leq 0$. On prendra $R_j < R_{j+1}$ et on désignera par B_j la boule fermée de F_j de rayon R_j ; puis on introduit les ensembles :

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}_i := \{\varphi \ ; \ \varphi \in C(B_i, X) \ \text{ impaire}, \ \varphi(v) = v \text{ si } \|v\| = R_i\}, \\ &\mathscr{B}_j := \left\{ \varphi\left(\overline{B_i \setminus A}\right) \ ; \ i \geq j, \ \varphi \in \mathscr{F}_i, \ A \in s(X), \ \gamma(A) \leq i - j \right\}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

On peut alors montrer le lemme suivant qui réunit les propriétés utiles de $\mathscr{B}_j$:

9.10 Lemme. *Sous les hypothèses et notations ci-dessus on a :*

1) *Pour tout* $j \geq 1$, $\mathscr{B}_j \neq \varnothing$, *et* $\mathscr{B}_{j+1} \subset \mathscr{B}_j$.

2) *Soit* $\varphi \in C(X, X)$ *une fonction impaire telle que pour tout* $n \geq j$ *et tout* $v \in B_n$, *avec* $\|v\| = R_n$, *on ait* $\varphi(v) = v$. *Alors pour tout* $A \in \mathscr{B}_j$ *on a* $\varphi(A) \in \mathscr{B}_j$.

3) *Si* $A \in \mathscr{B}_j$ *et* $M \in s(X)$ *est tel que* $\gamma(M) \leq i \leq j-1$, *alors* $\overline{A \setminus M} \in \mathscr{B}_{j-i}$.

4) *Si* $j \geq 1$, *et* $A \in \mathscr{B}_j$, *alors il existe* $v \in A \cap X_2$ *tel que* $\|v\| = R$.

Supposant ce lemme établi (voir *Exercices* pour la démonstration), on considère les nombres c_j définis par :

$$c_j := \inf_{A \in \mathscr{B}_j} \max_{v \in A} J(v), \tag{9.12}$$

et on montre comme nous l'avons fait plus haut la proposition :

9.11 Proposition. *Sous les hypothèses du théorème 9.9,* $\mathscr{B}_j$ *étant défini en (9.11) et* c_j *par (9.12), on a* $c_{j+1} \geq c_j \geq a$ *et chaque* c_j *est une valeur critique de* J. *De plus on a* $\lim_{j\to\infty} c_j = +\infty$, *et si pour un entier* $n \geq 0$ *on a* $c_j = c_{j+n}$, *alors* $\gamma(K(c_j)) \geq n + 1$.

(Comme toujours, $K(c)$ est l'ensemble des points critiques correspondant à une valeur critique c). La démonstration est analogue à ce que nous avons vu précédemment, et pour plus de détail voir *Exercices*. □

9.12 Remarque. En utilisant le théorème 9.9, on peut montrer que le problème de l'exemple 9.7 admet une infinité de solutions, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en supposant en plus que $G(x, s) \geq 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$. Pour cela, avec les notations déjà introduites, lorsque $\lambda \geq \lambda_1$, il suffit de considérer un entier $k \geq 1$ tel que $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$, puis poser $X_0 := \mathbb{R}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ et $X_2 := X_0^{\perp}$ l'orthogonal de X_0 dans $H_0^1(\Omega)$, et reprendre la démarche de l'exemple 8.7.

Cependant, il faut bien noter qu'il est essentiel de supposer que X_0 est de dimension finie pour la démonstration du théorème 9.9. En particulier on ne peut pas utiliser le résultat que nous venons de voir pour montrer l'existence d'une solution non nulle pour le système :

$$\begin{cases} -\Delta u = (u^2 + v^2)^m u - \lambda v & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = -(u^2 + v^2)^m v + \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \quad u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{9.13}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $m := (p-1)/2$ pour un réel $p > 1$ vérifiant $(N-2)p < N + 2$ et $\lambda > 0$. En effet on peut voir facilement que les solutions du système (9.13) peuvent être obtenues comme points critiques de la fonctionnelle définie sur $X := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par :

$$J(u, v) := \int_\Omega \left[|\nabla u(x)|^2 - |\nabla v(x)|^2 + 2\lambda u(x)v(x)\right] dx \\ - \frac{1}{m+1} \int_\Omega \left(u^2(x) + v^2(x)\right)^{m+1} dx$$

et que J satisfait la condition de Palais-Smale mais ne vérifie aucune des conditions du théorème 9.9. Cependant, une version plus fine de ce théorème, due à V. Benci & P.H. Rabinowitz et utilisant une certaine notion de *liaison* ou *enlacement* pour les ensembles, permet de montrer que J possède une valeur critique $c > 0$ sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (en particulier le système (9.13) admet une solution (u, v) telle que $u \not\equiv 0$ et $v \not\equiv 0$). Pour l'énoncé précis de la généralisation de la notion de *linking* (ou liaison) ainsi que pour une version du théorème 9.9 permettant à X_0 et X_2 d'être de dimension infinie, voir V. Benci & P.H. Rabinowitz [19] où on trouvera également d'autres exemples d'application. □

Exercices du chapitre 3

Exercice 1. Soient $\Omega :=]0,1[^N$ le cube unité de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$. Soient $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$K_\varphi := \left\{ v \; ; \; v \in W^{1,p}(\Omega), \; v = \varphi \text{ sur } \; \partial\Omega \right\}.$$

On considère une fonction $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 telles que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \qquad -c_1 + c_2|\xi|^p \leq F(\xi) \leq c_3 \left(1 + |\xi|^p\right),$$

et on pose $J(v) := \int_\Omega F(\nabla v(x))dx$, pour $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

1) On suppose que le minimum de J sur K_φ est atteint en $u \in K_\varphi$. Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$ et p.p. sur Ω on a :

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j} F(\nabla u(x))\eta_i\eta_j \geq 0.$$

(On pourra considérer $J(u+tv)$, où $v(x) := \varepsilon\zeta(x)\rho(x\cdot\eta/\varepsilon)$, avec $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ et ρ la fonction de période 2 sur $\mathbb{R}$ définie par $\rho(s) := s$ sur $[0,1]$, et $\rho(s) := 2-s$ sur $[1,2]$).

2) On suppose que J est faiblement séquentiellement s.c.i. sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Soient $(Q_j)_{1\leq j\leq 2^{nN}}$ la décomposition de Ω en 2^{nN} cubes de côté 2^{-n}, et $x_{j,n}$ le centre du cube Q_j pour $1 \leq j \leq 2^{nN}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixé, on pose $\varphi(x) := x \cdot \xi$ et on considère pour $v \in C_c^\infty(\Omega)$, la suite

$$u_{n,j}(x) := 2^{-n} v(2^n(x - x_{j,n})) + \xi \cdot x.$$

Montrer que $u_{n,j} \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$-faible si $u(x) := \xi \cdot x$.

3) En passant à la limite sur la suite $u_{n,j}$ définie plus haut, montrer que :

$$\text{mes}(\Omega)\, F(\xi) = J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_{n,j}) = \int_\Omega F(\xi + \nabla v(x))dx.$$

4) Déduire de la question précédente que pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j} F(\xi)\eta_i\eta_j \geq 0,$$

et en déduire que si J est faiblement séquentiellement s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega)$, alors F est convexe.

5) On suppose maintenant que F est convexe. Montrer que J est faiblement séquentiellement s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 2. Soient X un espace de Banach, J et $F_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 pour $1 \leq j \leq m$. Dans certains problèmes de minimisation du type

$$u \in K, \quad J(u) = \min_{v \in K} J(v), \qquad K := \{v \in X \ ; \ 1 \leq j \leq m, \ F_j(v) \geq 0\},$$

on peut montrer qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_j tels que

$$J'(u) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j'(u). \tag{1}$$

En fait, sous des hypothèses adéquates, on peut montrer que les multiplicateurs de Lagrange λ_j vérifient

$$\lambda_j \geq 0 \ \text{ pour } \ 1 \leq j \leq m \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(u) = 0. \tag{2}$$

Lorsque u vérifie $F_j(u) = 0$, on dit que la contrainte F_j est *saturée* : la relation (2) signifie que le multiplicateur de Lagrange provenant d'une contrainte non-saturée est nulle. Les relations (1) et (2) sont connues sous le nom de *relations de Kuhn-Tucker*. Ici nous supposerons que le point de minimum $u \in K$ existe et nous allons montrer ces relations dans le cas où toutes les fonctions F_j sont des fonctions affines, ou bien lorsque la condition suivante (que nous appellerons condition (KH) pour simplifier) est satisfaite : si $u \in K$ est tel que l'ensemble $I := \{j \ ; \ 1 \leq j \leq m, \ F_j(u) = 0\}$ est non vide, alors il existe $w \in X$ tel que pour tout $j \in I$ on ait

$$\begin{cases} \langle F_j'(u), w\rangle \geq 0 & \text{si } \ F_j \ \text{ est affine}, \\ \langle F_j'(u), w\rangle > 0 & \text{si } \ F_j \ \text{ n'est pas affine}. \end{cases}$$

1) Soient $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ des formes linéaires sur X telles que si $v \in X$ vérifie $\langle f_j, v\rangle \geq 0$ pour tout $j \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{m}$, alors $\langle f_0, v\rangle \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tels que

$$f_0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j.$$

(C'est le lemme de Minkowski. Noter d'abord que l'on peut supposer que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont linéairement indépendantes ; puis montrer que f_0 est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_m$. Pour établir le fait que $\lambda_j \geq 0$, montrer qu'il existe $v \in X$ tel que $\langle f_i, v\rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq m$).

2) On suppose que pour $1 \leq j \leq m$ toutes les fonctions F_j sont affines. Montrer que si $v \in X$ est tel que pour $1 \leq j \leq m$ on a $\langle F_j'(u), v\rangle \geq 0$, alors

pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u + tv \in K$ pour $0 \leq t \leq \varepsilon$; en déduire que $\langle J'(u), v\rangle \geq 0$. En utilisant la question **1)** établir les realations de Kuhn-Tucker (1) et (2).

3) Montrer que si pour tout $j \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{m}$ on a $F_j(u) > 0$, alors $J'(u) = 0$.

4) On suppose qu'il existe $j \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{m}$ tel que $F_j(u) = 0$. Avec les notations de la condition (KH), soit $v \in X$ tel que pour $\theta_0 > 0$ assez petit on ait $v + \theta w \neq 0$ pour $0 < \theta < \theta_0$. On fixe θ ; montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $j \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{m}$ on ait $F_j(u + \varepsilon(v + \theta w)) > 0$ pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. En déduire que $\langle J'(u), v\rangle \overset{\geq}{} 0$ et établir les relations (1) et (2) dans ce cas.

5) On suppose que la fonction J est convexe et que toutes les fonctions F_j sont concaves. Vérifier que K est un convexe fermé. On suppose que $u \in K$ satisfait la conditions suivante : il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(u) = 0, \qquad J'(u) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j'(u).$$

Montrer que u réalise le minimum de J sur K. (Cela montre que dans le cas où J est convexe et les F_j concaves, si la condition (KH) est satisfaite alors les relations de Kuhn-Tucker caractérisent le point où J atteint son minimum sur K).

6) Etudier le cas où on suppose seulement que les fonctions J et F_j sont G-dérivables (les autres hypothèses étant inchangées).

Exercice 3. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction mesurable en $x \in \Omega$, continue et croissante en $s \in \mathbb{R}$ telle que $g(\cdot, 0) = 0$. On suppose qu'il existe une fonction de Caratheodory h, croissante en $s \in \mathbb{R}$ telle que pour $t, s \in \mathbb{R}$ on ait $|g(x, s + t) - g(x, s)| \leq h(x, t)$ p.p. sur Ω et que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait $h(\cdot, s) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Montrer que si $f \in L^q(\Omega)$ et $q \geq \frac{2N}{N+2}$, alors

$$J(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \int_\Omega G(x, v(x))dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

atteint son minimum sur $K_0 := \left\{v \in H^1_0(\Omega)\ ;\ G(\cdot, v(\cdot)) \in L^1(\Omega)\right\}$ en un point $u \in K_0$ tel que $g(\cdot, u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et qui satisfait l'équation

$$-\Delta u + g(\cdot, u) = f \qquad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega).$$

Dans le cas particulier où $N = 2$, analyser soigneusement le type de croissance que l'on peut imposer à g.

Exercice 4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \geq 1$ et

$$J(v) := \|\nabla v\|^2 + \|v\|^2 + \lambda\|v\|^{p+1}_{p+1} - \langle f, v\rangle$$

définie sur $X := H^1_0(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ avec $f \in X'$ fixée (ici $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(\Omega)$). Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles J est uniformément strictement convexe sur X.

Exercice 5. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p > 0$. Montrer que pour $\lambda > 0$ la fonction

$$J_0(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale sur $X := H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$. Trouver toutes les valeurs $q \geq 1$ telles que pour $f \in X'$ fixée, la fonction

$$J(v) := J_0(v) - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v(x)|^{q+1} dx - \langle f, v\rangle$$

satisfait la condition de Palais-Smale sur X.

Exercice 6. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$. Montrer que pour $\lambda > 0$ la fonction

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx$$

ne satisfait pas la condition de Palais-Smale si $p := (N+2)/(N-2)$. Lorsque $(N-2)p > N+2$, est-ce que J satisfait la condition de Palais-Smale sur $X := H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$?

Exercice 7. Soient (X, d) un espace métrique séparable et $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ un recouvrement ouvert de X. On pose

$$\delta(x, y) := \min(1, d(x, y)), \qquad f_n(x) := \delta(x, \Omega_n^c).$$

1) Montrer que δ est une distance équivalente à d, que $0 \leq f_n \leq 1$ et que pour tous $x, y \in X$ on a :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \delta(x, y).$$

2) On pose $h_1(x) := 0$ et

$$h_n(x) := \sup_{i<n} f_i(x), \qquad g_n(x) := \sup_{i\leq n} f_i(x), \qquad h(x) := \sup_{i\geq 1} f_i(x).$$

Montrer que h_n, g_n et h sont lipschitziennes sur X (avec une constante de Lipschitz égale à 1), et que $0 \leq h_n \leq g_n \leq 1$.

3) Soit $\varphi_n := g_n - h_n$. Montrer que $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et que si $x \notin \Omega_n$ alors $\varphi_n(x) = 0$; montrer par récurrence que pour tout $x \in X$ on a :

$$\sum_{i\leq n} \varphi_i(x) = g_n(x), \qquad \sum_{n\geq 1} \varphi_n(x) = h(x) > 0.$$

4) Soient $\beta_n(x) := \varphi_n(x)/h(x)$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \beta_n \equiv 1$ et que si

$$\gamma_n(x) := \max\left(0, \beta_n(x) - \frac{1}{2}\sup_{k\geq 1} \beta_k(x)\right),$$

alors γ_n est localement lipschitzienne sur X.

5) Soient $\omega_j := [\gamma_j > 0]$ et

$$\theta_j(x) := \frac{\gamma_j(x)}{\sum_{n\geq 1}\gamma_n(x)}\,.$$

Montrer que $(\omega_j)_{j\geq 1}$ est un recouvrement localement fini et plus fin que $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ et que $(\theta_j)_{j\geq 1}$ est une partition de l'unité localement lipschitzienne subordonnée à $(\omega_j)_{j\geq 1}$ (en fait on peut montrer, sans hypothèse de séparabilité, que tout espace métrique est paracompact).

Exercice 8. Soient X un espace de Banach et $F : X \longrightarrow X$ une fonction bornée ; on suppose que pour tout $R > 0$ il existe une constante L telle que

$$\forall x, y \in B(0,R), \qquad \|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

1) Montrer que pour tout $x \in X$, l'équation différentielle

$$\frac{d\eta}{dt} = F(\eta), \qquad \eta(0) = x$$

admet une solution unique $\eta(t,x)$ qui existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ (si

$$T_{\max} := \sup\left\{T > 0\ ;\ \exists \eta \in C^1([0,T],X) \text{ solution sur } [0,T]\right\},$$

en supposant que $T_{\max} < \infty$, considérer une suite $t_n \uparrow T_{\max}$, et montrer que $(\eta(t_n,x))_n$ est une suite de Cauchy qui converge vers un point x_*, puis résoudre l'équation avec la donnée initiale x_*).

2) Montrer que si $x_n \to x$ alors $\eta(t,x_n) \to \eta(t,x)$.

Exercice 9. Avec les hypothèses et notations du théorème du col 8.1, montrer que

$$\widetilde{c} := \inf\{b \in \mathbb{R}\ ;\ [J \leq b] \text{ contient un chemin continu allant de } 0 \text{ à } u_0\}$$

est une valeur critique de J et que $a \leq \widetilde{c} \leq c$.

Exercice 10. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 et $p > 0$ un réel. Montrer que si $X := H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$, alors

$$J(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1} - \langle f, v\rangle$$

satisfait, pour $f \in X'$, la condition de Palais-Smale sur X (on pourra utiliser le lemme de Brezis-Lieb).

Exercice 11. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ et $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p < N+2$. En utilisant le théorème du col montrer que si $\lambda < \lambda_1$, et $f \in H^{-1}(\Omega)$ a une norme *assez petite* (dans un sens que l'on précisera), alors l'équation

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u + f$$

admet au moins une solution (on notera que dans ce problème l'origine n'est pas un point de minumum local de l'énergie). Analyser également le cas où $\lambda \geq \lambda_1$.

Exercice 12. (Problème du pendule forcé). Soient $T > 0$, $a > 0$ fixés et $f \in L^1(0,T)$. On considère l'ensemble des fonctions T-périodiques de $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ i.e.

$$H^1(S_T) := \left\{ v \in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}) \ ; \ \forall t \in \mathbb{R},\ v(t+T) = v(t) \right\},$$

la norme de $H^1(S_T)$ étant induite par celle de $H^1(0,T)$. On posera $M(v) := \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt$. On s'intéresse à la résolution (dans $H^1(S_T)$) du problème :

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' = a\sin(u) - f & \text{sur } \ ]0,T[\\ u(t) = u(t+T) & \text{pour tout } \ t \in]0,T[\end{cases}$$

On posera

$$J_0(v) := a\int_0^T \cos(v(t))dt + \int_0^T f(t)v(t)dt,$$
$$J(v) := \frac{1}{2}\int_0^T |v'(t)|^2 dt + J_0(v).$$

1) Montrer que l'équation (1) n'admet de solution que si $|M(f)| \leq a$.

Dans la suite on suppose que $M(f) = 0$.

2) Montrer qu'il existe une constante (dépendant de T) telle que pour tout $v \in H^1(S_T)$ on ait :

$$\|v - M(v)\|_\infty \leq C\|v'\|_{L^2(0,T)}\ .$$

3) Montrer que J_0 est faiblement séquentiellement continue sur l'espace $H^1(S_T)$ et en déduire que J y est faiblement séquentiellement s.c.i.

4) Montrer que J est bornée inférieurement sur $H^1(S_T)$ et qu'en particulier elle atteint son minimum en un point $u_0 \in H^1(S_T)$ tel que $0 \leq M(u_0) \leq 2\pi$ (on notera que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on a $J(v + 2k\pi) = J(v)$).

5) Soit u_0 comme ci-dessus et $\alpha := J(u_0) = \min_{v\in H^1(S_T)} J(v)$. On considère une suite $(u_k)_k$ telle que $J(u_k) \to \alpha$ et $u_k \rightharpoonup u_*$ dans $H^1(S_T)$-faible. Montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_*\|_{H^1(S_T)} = 0.$$

(Remarquer que

$$\|u_k' - u_*'\|_{L^2}^2 = 2J(u_k) - 2J_0(u_k) + \int_0^T |u_*'|^2 dt - 2\int_0^T u_k' u_*' dt$$

et passer à la limite).

6) Montrer que J satisfait cette variante de la condition de Palais-Smale : si $(u_n)_n$ est une suite de $H^1(S_T)$ telle que $J(u_n) \to c$ et $J'(u_n) \to 0$, alors il existe une sous-suite $(u_{n_j})_j$, une suite $(\widetilde{u}_j)_j$ et $u \in H^1(S_T)$ tels que :

$$\text{(ps)} \qquad M(\widetilde{u}_j) - M(u_{n_j}) = 0 \pmod{2\pi}, \qquad \widetilde{u}_j \to u \quad \text{dans } H^1(S_T).$$

7) Enoncer et établir rapidement un analogue du théorème du col pour J.

8) Pour $R > 0$ on désigne par $\Sigma(u_0, R)$ la sphère de centre u_0 et de rayon R dans $H^1(S_T)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ (et $R < 2\pi$) tel que pour tout $v \in \Sigma(u_0, R)$ on ait $J(v) > \alpha$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $v \in \Sigma(u_0, R)$ on ait $J(v) \geq \alpha + \delta$ (raisonner par l'absurde et utiliser la question **5)**).

9) On suppose que pour tout R, avec $0 < R < 2\pi$, il existe $v \in \Sigma(u_0, R)$ tel que $J(v) = \alpha$. En déduire qu'alors (1) admet une infinité de solutions.

10) On suppose qu'il existe R, avec $0 < R < 2\pi$, tel que pour tout $v \in \Sigma(u_0, R)$ on ait $J(v) > \alpha$. En utilisant le théorème du col établi en **7)**, montrer qu'il existe une solution u_* de (1) telle que $J(u_*) > \alpha$.

11) En déduire que l'équation (1) admet toujours au moins deux solutions distinctes.

Exercice 13. Soient Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ les suites des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$. On note $X_1 := \mathbb{R}\{\varphi_1, \dots \varphi_k\}$ et on suppose que $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$, que $m \in L^\infty(\Omega)$ vérifie $m > 0$ p.p. sur Ω, et pour $\theta > 2$ et $c \geq 0$ fixés, on pose

$$F(t, v) := \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda)t^2 + c - \int_\Omega m(x)|v(x) + t\varphi_{k+1}(x)|^\theta dx.$$

Montrer que pour tout $R > 0$ donné, il existe $R_1 > R$ tel que si $v \in X_1$ et $\|\nabla v\| = R_1$ on ait $F(t, v) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 14. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On suppose que $\rho^+ \in L^\infty(\Omega) + L^q(\Omega)$, avec $q > N/2$ si $N \geq 2$.

1) Montrer que si $p > 1$ et $(N-2)p < N+2$, la fonction

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^2 - \lambda\rho(x)|v(x)|^2\right] dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx$$

satisfait la condition de Palais-Smale sur l'espace des $v \in H_0^1(\Omega)$ telles que $\rho^- v^2 \in L^1(\Omega)$.

2) Etudier l'existence d'une solution non nulle pour l'équation :

$$-\Delta u = \lambda\rho u + |u|^{p-1}u, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

pour $p > 1$ et $(N-2)p < N+2$ et différentes valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Généraliser au cas où la non linéarité est $g(\cdot, u)$ au lieu de $|u|^{p-1}u$, et g vérifie les hypothèses adéquates introduites à l'exemple 8.7.

4) Que se passe-t-il si on suppose que $N \geq 3$ et $\rho \equiv \rho^+ \in L^{N/2}(\Omega)$?

Exercice 15. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$ et $p > 1$ des réels tels que $(N-2)p < N+2$ et $m := (p-1)/2$. Sur $\mathbb{H} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ on considère la fonction

$$J(u,v) := \int_\Omega \left[|\nabla u(x)|^2 - |\nabla v(x)|^2 + 2\lambda u(x)v(x)\right] dx \\ - \frac{1}{m+1}\int_\Omega \left(u^2(x)+v^2(x)\right)^{m+1} dx.$$

Montrer que J satisfait la condition de Palais-Smale sur $\mathbb{H}$.

Exercice 16. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p > 1$. Montrer que si

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^2 - \lambda |v(x)|^2\right] dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx,$$

alors en désignant par $\mathscr{B}_j$ l'ensemble des parties compactes A de $H_0^1(\Omega)$ qui sont symétriques, ne contiennent pas l'origine et telles que $\gamma(A) \geq j$, on a :

$$\inf_{A\in\mathscr{B}_j} \max_{v\in A} E(v) = -\infty, \qquad \sup_{A\in\mathscr{B}_j} \min_{v\in A} E(v) = +\infty.$$

Exercice 17. Montrer que les nombres $\widetilde{c}_j$ introduits au lemme 9.6 sont des valeurs critiques de J.

Exercice 18. Montrer en détail le lemme 9.10 et la proposition 9.11.

Exercice 19. Montrer que la fonctionnelle $J(u,v)$ introduite à la remarque 9.12 satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Exercice 20. Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ et $Au := -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ pour $u \in D(A)$, où $D(A) := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ ;\ Au \in L^p(\Omega)\right\}$ (ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$).

1) Montrer qu'il existe une constante $\lambda_{1,p} > 0$ (dépendant de p et de Ω) telle que pour tout $\lambda < \lambda_{1,p}$ et $f \in L^p(\Omega)$, l'équation

$$Au = \lambda |u|^{p-2}u + f, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

admet une solution unique. Montrer aussi que l'application $f \mapsto u$ de $L^p(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est continue, et que si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.

2) Soient $q > p$ et $(N-p)q < pN$, et pour $\lambda < \lambda_{1,p}$,

$$J(v) := \frac{1}{p}\int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^p - \lambda |v(x)|^p\right] dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q dx.$$

Montrer que la fonction J est de classe $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et satisfait la condition de Palais-Smale.

3) Montrer que sous les hypothèses de la question précédente, l'équation

$$Au = \lambda |u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1}$$

admet une solution $u \not\equiv 0$, et en plus $u \geq 0$ sur Ω.

4) Généraliser le résultat précédent au cas où λ est quelconque.

5) On suppose que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie $g(0) = 0$, qu'il existe des constantes $R > 0$ et $\theta > p$ telles que $0 < \theta G(s) \leq sg(s)$ pour $|s| \geq R$ et que g est à croissance sous-critique en ce sens que $|g(s)| \leq a(1+|s|^q)$ pour une constante $a > 0$ et pour q tel que $(N-p)q < pN$. Montrer que l'équation

$$Au = \lambda |u|^{p-2}u + g(u), \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

admet une solution non triviale (ici $G(s) := \int_0^s g(\sigma)d\sigma$).

6) Montrer qu'en réalité (1) admet une infinité de solutions.

Exercice 21. Soit $Au := -\Delta u + |x|^2 u$ pour $u \in D(A)$ et

$$D(A) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \; ; \; Au \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

(Ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$; A est appelé l'opérateur de l'oscillateur harmonique). On considère l'espace H_1 défini par :

$$H_1 := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^2 + |x|^2 u^2(x) \right) dx < \infty \right\}$$

et on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$ induite par le produit scalaire

$$(u|v)_1 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + |x|^2 u(x) v(x) \right) dx.$$

1) Montrer que l'injection de H_1 dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est compacte pour $2 \leq q < 2^*$.

2) Soit $\lambda_1 := \inf \left\{ (u|u)_1 \; ; \; u \in H_1, \quad \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\}$. Montrer que λ_1 est atteint pour une fonction $\varphi_1 \geq 0$, que $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$ et $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

3) Montrer que λ_1 est valeur propre simple de A et, en remarquant que $\widehat{\varphi}_1$, la transformée de Fourier de φ_1, satisfait la même équation, calculer λ_1 et φ_1.

4) Montrer que pour tout $p > 1$ et $\lambda > N$, il existe une solution positive de l'équation

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u + |x|^2 u = \lambda u \\ u \in H_1 \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

5) Montrer que pour $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + |x|^2 u = \lambda u + |u|^{p-1}u \\ u \in H_1 \setminus \{0\} \end{cases}$$

admet une infinité de solutions et qu'il n'existe de solution positive que si $\lambda < N$.

4 Points critiques avec contrainte

1. Pourquoi des contraintes ?

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. Nous avons déjà vu que l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \not\equiv 0\,, & \end{array} \right. \tag{1.1}$$

admettait une infinité de solutions. En particulier il existe une solution positive de cette équation obtenue en minimisant la fonctionnelle $v \mapsto \|\nabla v\|^2 =: J(v)$ (puis en faisant une homothétie) sur l'ensemble $S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \|v\|_{p+1} = 1 \right\}$ (voir l'exemple **1.**14.9). On peut montrer aussi que (1.1) admet une infinité de solutions en montrant, comme nous le ferons plus loin, que la fonction J possède une infinité de valeurs critiques sur S. De ce point de vue, il s'agit de l'application d'une généralisation d'un théorème dû à L. Ljusternik & L. Schnirelman disant qu'une fonction paire de classe C^1 définie sur S^{n-1}, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, possède au moins n valeurs critiques (dans le cas présent nous avons une fonctionnelle paire de classe C^1 sur une sphère de dimension infinie).

Il est intéressant d'étudier les solutions de certains problèmes, en étudiant une fonctionnelle adéquate sur une contrainte bien choisie, pour de multiples raisons : on peut placer le problème en question dans le cadre d'une famille de problèmes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres et comprendre ainsi certains phénomènes qui ne paraissent pas clairs *a priori* ; on peut obtenir des conditions nécessaires pour l'existence de solutions ou bien éliminer des inconnues du problème en les obtenant *a posteriori* comme des multiplicateurs de Lagrange : c'est le cas lorsque l'on cherche des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint A sur un espace de Hilbert, où les valeurs propres apparaissent comme des mutiplicateurs de Lagrange pour les points critiques de $v \mapsto (Av|v)$ sur la sphère unité de H. On peut aussi, dans certains cas, chercher une solution ayant des propriétés particulières parmi les solutions éventuelles d'un problème. Par exemple, dans le cas de l'équation (1.1), le fait de considérer $J(v) := \|\nabla v\|^2$ sur la sphère unité de $L^{p+1}(\Omega)$ nous a permis d'emblée, et de manière très simple, de construire une solution positive. Pour d'autre exemples voir *Exercices*.

Dans le cas particulier que nous avons en (1.1), on peut également se poser la question suivante : parmi les solutions de (1.1), y a-t-il une solution d'énergie minimale ? Rappelons que les solutions de (1.1) sont les points critiques de la fonctionnelle définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx$$

et la question est de savoir s'il existe un point critique $\widetilde{u}$ de E tel que pour toute autre solution u de (1.1) on ait $E(\widetilde{u}) \leq E(u)$. Une telle solution est appelée *état fondamental* (en anglais *ground state*). La question n'est pas superflue car E n'est pas bornée inférieurement et possède une infinité de points critiques. Pour répondre à cette question, notons que si u est solution de (1.1), alors on a (en multipliant l'équation par u et en effectuant une intégration par parties) :

$$F(u) := \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = 0,$$

i.e. $u \in S_0$ où on a posé :

$$S_0 := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \, ; \, F(v) = 0 \right\}. \tag{1.2}$$

Vérifions que F définit bien une contrainte au sens du paragraphe § **1.**14. Si $v \in S_0$, alors $F'(v) = -2\Delta v - (p+1)|v|^{p-1}v$, et si on avait $F'(v) = 0$, on aurait (en calculant $\langle F'(v), v\rangle$ et en faisant une intégration par parties)

$$2\|\nabla v\|^2 = (p+1)\int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx, \quad \text{et} \quad \|\nabla v\|^2 = \int_\Omega |v(x)|^{p+1} dx,$$

ce qui impliquerait $v \equiv 0$, alors que par définition $0 \notin S_0$. Il est à noter que cette vérification permet également de voir que pour tout $v \in S_0$ on a $\langle F'(v), v\rangle \neq 0$. Soit maintenant $\widetilde{u} \in S_0$ réalisant le minimum de E sur S_0 (comme on le verra dans un instant un tel $\widetilde{u}$ existe) ; alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $E'(\widetilde{u}) = \lambda F'(\widetilde{u})$. On obtient ainsi, en multipliant par $\widetilde{u}$ et en notant que $F(v) = \langle E'(v), v\rangle$:

$$0 = F(\widetilde{u}) = \langle E'(\widetilde{u}), \widetilde{u}\rangle = \lambda \langle F'(\widetilde{u}), \widetilde{u}\rangle,$$

et ainsi $\lambda = 0$ et $E'(\widetilde{u}) = 0$. On voit en même temps que tout point critique de E sur S_0 est un point critique de E sur $H_0^1(\Omega)$. Mais l'avantage de considérer E sur la contrainte S_0 est que la solution $\widetilde{u}$, trouvée en minimisant E sur S_0, est nécessairement d'énergie minimale (en plus on peut montrer que $\widetilde{u}$ peut être choisie positive). De plus E est bornée inférieurement sur S_0, puisque si $v \in S_0$, alors $E(v) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla v\|^2$, et on obtient ainsi une information supplémentaire, à savoir que toute solution de (1.1) est d'énergie positive.

Montrons maintenant que E atteint son minimum sur S_0. On commence par noter que grâce à l'inégalité de Sobolev (ou bien l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg) pour tout $v \in S_0$ on a $\|v\|_{p+1} \leq C\|\nabla v\| = C\|v\|_{p+1}^{(p+1)/2}$, pour une constante C dépendant de N, p, Ω. Comme $v \neq 0$, on en déduit que $\|v\|_{p+1} \geq C_0$

où $C_0 > 0$ est une constante dépendant uniquement de N, p, Ω. Cela signifie que S_0 est, au sens de $L^{p+1}(\Omega)$ mais aussi au sens de $H_0^1(\Omega)$, *loin* de l'origine et en particulier S_0 est fermé dans $H_0^1(\Omega)$. Soit :

$$m := \inf_{v\in S_0} E(v) = \frac{p-1}{2(p+1)} \inf_{v\in S_0} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Si $u_n \in S_0$ et $E(u_n) \downarrow m$, on voit immédiatement que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En utilisant le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, on peut supposer que $u_n \to \widetilde{u}$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ et, puisque $\|u_n\|_{p+1} \geq C_0$, on a aussi $\|\widetilde{u}\|_{p+1} \geq C_0$, ce qui signifie en particulier que $\widetilde{u} \neq 0$. Comme de plus E et F sont faiblement séquentiellement s.c.i. sur $H_0^1(\Omega)$, on a aussi $E(\widetilde{u}) \leq m$ et $F(\widetilde{u}) \leq 0$.

Pour terminer il nous reste à montrer que $\widetilde{u} \in S_0$, c'est à dire que $F(\widetilde{u}) = 0$. On sait déjà que $F(\widetilde{u}) \leq 0$; si $\|\nabla\widetilde{u}\|^2 < \|\widetilde{u}\|_{p+1}^{p+1}$ (ce qui signifie $F(\widetilde{u}) < 0$), on définit $w(\theta) := \theta\widetilde{u}$ pour $0 \leq \theta \leq 1$. On a

$$F(w(\theta)) = \theta^2\|\nabla\widetilde{u}\|^2 - \theta^{p+1}\|\widetilde{u}\|_{p+1}^{p+1},$$

or $F(w(1)) = F(\widetilde{u}) < 0$, alors que si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $F(w(\varepsilon)) > 0$. On en conclut qu'il existe t tel que $\varepsilon < t < 1$ et $F(w(t)) = 0$. Ainsi on a $w := w(t) \in S_0$ et :

$$\begin{aligned} m \leq E(w) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla w\|^2 &= \frac{p-1}{2(p+1)}\, t^2\, \|\nabla\widetilde{u}\|^2 \\ &< \frac{p-1}{2(p+1)^2}\, \|\nabla\widetilde{u}\|^2 \leq m, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Par conséquent on doit avoir $\|\nabla\widetilde{u}\|^2 = \|\widetilde{u}\|^{p+1}$, i.e. $\widetilde{u} \in S_0$, et $E(\widetilde{u}) = \min_{v\in S_0} E(v)$. En fait on peut montrer (voir *Exercices*) que u_n tend vers $\widetilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$-fort. □

On peut énoncer et montrer facilement la proposition suivante que nous avons utilisée et prouvée dans le cas particulier de l'exemple **1.**14.9 (en montrant qu'au point de minimum de J sur S_0, la fonction F est faiblement séquentiellement continue sur S_0).

1.1 Proposition. *Soient X un espace de Banach réflexif et F une fonction de classe C^1 de $X \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère $S := \{v \in X\ ;\ F(v) = 0\}$ et on suppose que pour tout $v \in S$ on a $F'(v) \neq 0$, et que F est faiblement séquentiellement continue. Soit J une fonction minorée sur S, et faiblement séquentiellement s.c.i. de S dans $\mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{v\in S, \|v\|\to\infty} J(v) = +\infty,$$

alors J atteint son minimum sur S.

1.2 Exemple. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant la condition de Caratheodory (**1.**16.1). On suppose que :

$$\begin{cases} \exists p \geq 1, \quad \exists p_0 > \dfrac{N}{2}, \quad b_0 \in L^{p_0}(\Omega), \quad b_1 \in \mathbb{R}_+, \\ |g(x,s)| \leq b_0(x) + b_1|s|^p, \end{cases} \tag{1.3}$$

et on note $G(x,s) := \int_0^s g(x,\sigma)d\sigma$. Pour $m \in \mathbb{R}^*$ donné on suppose que si $v \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega G(x,v(x))dx = m$, alors $g(x,v(x)) \not\equiv 0$ p.p. sur Ω. Alors en posant

$$\begin{cases} F(v) := \displaystyle\int_\Omega G(x,v(x))dx - m, \\ S(m) := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ F(v) = 0 \right\}, \end{cases}$$

on vérifie facilement que grâce à la condition (1.3) et au théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, F est faiblement séquentiellement continue sur $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent si

$$a(x) := (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq N},$$

est une matrice uniformément coercive et à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, la fonction

$$J(v) := \int_\Omega \left[a(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x) - \lambda v^2(x) \right] dx,$$

atteint son minimum sur $S(m)$ pourvu que $S(m) \neq \varnothing$ et que l'on ait :

$$\lambda < \lambda_1 := \min_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega a(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)dx. \tag{1.4}$$

(Ici $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$). Cela conduit à l'existence d'un couple $(u,\mu) \in S(m) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \partial_i \left(a_{ij} \partial_j u \right) = \mu g(\cdot, u) & \text{dans } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Il faut noter qu'en général (u,μ) dépend de m et que dans certains cas on peut alléger la limitation sur λ donnée par (1.4). On peut également remarquer que dans le cas où $s \mapsto g(x,s)$ est impair, comme pour tout $v \in S$ on a aussi $|v| \in S$ et que $J(|v|) \leq J(v)$ (voir proposition **1.**8.22), on peut supposer que la suite minimisante est positive et que $u \geq 0$.

Il est instructif de méditer sur l'exemple suivant où

$$g(x,s) := \rho(x)|s|^{p-1}s,$$

avec $\rho \in L^\infty(\Omega)$ et $\rho > 0$ p.p. sur Ω. Dans ce cas on peut montrer que pour tout $m > 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, J atteint son minimum sur $S(m)$ en un point u et que si $Av := -\mathrm{div}\,(a(\cdot)\nabla v)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Au - \lambda u = \mu\rho|u|^{p-1}u$. En multipliant cette équation par u et en faisant une intégration par parties, on voit que $J(u) = \mu(p+1)m$, et on peut supposer que $u \geq 0$.

Or si $\lambda < \lambda_1$, pour tout $v \in S(m)$ on a $J(v) > 0$ et par conséquent $\mu > 0$: dans ce cas, en posant $u_0 := \mu^{1/(p-1)}u$, on vérifie sans difficulté que u_0 est solution du problème :

$$Au_0 - \lambda u_0 = \rho|u_0|^{p-1}u_0, \qquad u_0 \in H_0^1(\Omega), \qquad u_0 \not\equiv 0.$$

En revanche lorsque $\lambda > \lambda_1$, si $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ est telle que

$$\int_\Omega \rho(x)|\varphi_1|^{p+1}(x)dx = m \quad \text{et} \quad A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1,$$

alors $J(\varphi_1) < 0$. Par conséquent $\inf_{v\in S(m)} J(v) < 0$ et $\mu < 0$. Dans ce cas en posant $u_1 := |\mu|^{1/(p-1)}u$, on vérifie que u_1 est solution du problème :

$$Au_1 - \lambda u_1 + \rho|u_1|^{p-1}u_1 = 0, \qquad u_1 \in H_0^1(\Omega), \qquad u_1 \not\equiv 0.$$

Enfin dans le cas particulier où $\lambda = \lambda_1$, la fonction φ_1 étant comme ci-dessus, on peut voir que $\mu = \inf_{v\in S(m)} J(v) = 0$, et que le point où J atteint son minimum sur $S(m)$ est précisément $\pm\varphi_1$. □

Pour construire des points critiques sur des contraintes, nous allons reprendre la démarche du chapitre 3, en adaptant les différentes notions dont nous avons eu besoin, en commençant par la condition de Palais-Smale.

2. La condition de Palais-Smale

Soit X un espace de Banach. Dans toute la suite lorsque l'on considère une contrainte du type :

$$S := \{v \in X \ ; \ F(v) = 0\}, \tag{2.1}$$

on suppose toujours que :

$$F \in C^1(X, \mathbb{R}), \qquad \text{et} \qquad \forall v \in S, \quad F'(v) \neq 0. \tag{2.2}$$

2.1 Définition. *Soient X un espace de Banach, F vérifiant (2.2), S défini par (2.1) et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que $J_{|_S}$ vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c), ou que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S, si toute suite $(u_n, \lambda_n) \in S \times \mathbb{R}$ telle que :*

$$J(u_n) \to c \quad \textit{dans } \mathbb{R}, \qquad \textit{et} \qquad J'(u_n) - \lambda_n F'(u_n) \quad \textit{dans } X',$$

contient une sous-suite $(u_{n_k}, \lambda_{n_k})_k$ convergeant vers (u, λ) dans $S \times \mathbb{R}$.

Naturellement, il n'est pas indispensable que J soit définie dans X tout entier : on peut définir une notion analogue lorsque J est définie dans un voisinage de S ou même seulement sur S, en précisant le sens de la dérivée d'une fonctionnelle définie sur une variété. On notera que si J satisfait la condition de Palais-Smale en $c \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble

$$\{(u,\lambda) \in S \times \mathbb{R} \ ; \ J(u) = c, \ \text{ et } \ J'(u) = \lambda F'(u)\}$$

est compact dans $X \times \mathbb{R}$ et il en est de même des ensembles

$$K(c) := \{u \in S \ ; \ J(u) = c \ \text{ et } \ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ J'(u) = \lambda F'(u)\}$$

et $\cup_{a \le c \le b} K(c)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Nous allons illustrer cette définition par quelques exemples.

2.2 Exemple. Soit $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte défini sur un espace de Hibert H_0 et à valeurs dans H_0. On suppose que pour tout $u \in D(A)$ on a $(Au|u) \ge 0$, où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire de H_0, identifié à son dual. On désigne par H le domaine de $A^{1/2}$, et on convient d'écrire $(Au|u)$ au lieu de $(A^{1/2}u|A^{1/2}u)$. On rappelle qu'alors il existe une extension $\widetilde{A}$ de A telle que $I + \widetilde{A}$ soit un isomorphisme entre H et H' (voir remarque **1.**9.4). On va montrer que $J(u) := (Au|u)$, défini sur H, satisfait la condition de Palais-Smale sur $S := \{v \in H \ ; \ (u|u) = 1\}$. En effet si $(u_n, \lambda_n) \in S \times \mathbb{R}$ est tel que $h_n := \widetilde{A}u_n - \lambda_n u_n \to 0$ dans H' et $J(u_n) \to c \in \mathbb{R}$, tout d'abord (en calculant le produit $\langle h_n, u_n \rangle$) on a $J(u_n) - \lambda_n \to 0$, i.e. $\lambda_n \to c$. Ensuite on remarque que $(I + \widetilde{A})u_n = h_n + (\lambda_n + 1)u_n$ est bornée dans H' et, $(I + \widetilde{A})$ étant un isomorphisme entre H et H', $(u_n)_n$ est bornée dans H. Puis, comme A est à résolvante compacte, l'injection de H dans H_0 est compacte et par conséquent, il existe une sous-suite $(u_{n_i})_i$ qui converge vers u dans H_0 et en particulier $u \in S$. De plus l'injection de H_0 dans H' est continue et on peut en déduire que

$$u_{n_i} = (I + \widetilde{A})^{-1} \left[h_{n_i} + (\lambda_{n_i} + 1)u_{n_i}\right] \to (1 + c)(I + \widetilde{A})^{-1}u \ \text{ dans } \ H,$$

c'est à dire que $(u_n)_n$ contient une sous-suite convergeant vers $u \in S$. De plus $\widetilde{A}u = cu$: par conséquent $\widetilde{A}u \in H$ et $\widetilde{A}u = Au$, i.e. u est un vecteur propre de A et c est une valeur propre. Ainsi J satisfait la condition de Palais-Smale sur S. □

2.3 Exemple. Soient $X := H^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$S := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \ ; \ \|v\|^2 = 1\right\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors si $J(v) := \|\nabla v\|^2$, J ne vérifie pas la condition de Palais-Smale sur S. En effet si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \cap S$, en posant $u_n(x) := n^{-N/2}\varphi(x/n)$, on a $u_n \in S$, alors que $J(u_n) = n^{-2}J(\varphi) \downarrow 0$, et $\|\Delta u_n\| = n^{-2}\|\Delta\varphi\|$; par conséquent $J'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. On voit que la seule limite possible pour u_n est zéro, et évidemment $(u_n)_n$ ne contient aucune sous-suite convergeant vers zéro dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

2.4 Exemple. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \ge 1$ un réel tel que $(N - 2)p < N + 2$ et enfin $\rho \in L^\infty(\Omega)$. On considère sur $H_0^1(\Omega)$ la fonction $J(v) := \|\nabla v\|^2 + \int_\Omega \rho(x)|v(x)|^2 dx$ et l'ensemble de contraintes

$$S := \left\{v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \|v\|_{p+1}^{p+1} = 1\right\},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(\Omega)$ et $\|\cdot\|_{p+1}$ celle de $L^{p+1}(\Omega)$. Alors J vérifie la condition de Palais-Smale sur S. En effet si $c \in \mathbb{R}$ et $(u_n, \lambda_n) \in S \times \mathbb{R}$ est telle que

$$\begin{cases} J(u_n) \to c \\ h_n := -\Delta u_n + \rho u_n - \lambda_n |u_n|^{p-1} u_n \to 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases}$$

on voit tout d'abord, puisque u_n est bornée dans $L^{p+1}(\Omega)$, que u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ (on aura noté qu'ici nous ne faisons aucune hypothèse sur le signe de ρ). Puis en calculant $\langle h_n, u_n \rangle$, on voit que $\lambda_n = J(u_n) - \langle h_n, u_n \rangle$, d'où on déduit que $(\lambda_n)_n$ est bornée. Comme d'après le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour $q = 2$ ou $q = p+1$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k}, \lambda_{n_k})_k$ qui converge vers (u, λ) dans $\left(L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)\right) \times \mathbb{R}$. En désignant par B l'application linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ fait correspondre la solution $Z \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta Z = f$, on conclut que

$$u_{n_k} = B\left(h_{n_k} - \rho u_{n_k} + \lambda_{n_k} |u_{n_k}|^{p-1} u_{n_k}\right) \to B\left(-\rho u + \lambda |u|^{p-1} u\right)$$

dans $H_0^1(\Omega)$. On obtient ainsi une solution du problème $-\Delta u + \rho u = \lambda |u|^{p-1} u$ (et $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$). Pour $p = 1$, ce dernier problème correspond à un problème aux valeurs propres. Lorsque $p > 1$, certains auteurs, de façon quelque peu impropre, appellent ce genre d'équations *problème aux valeurs propres non-linéaires*, ce qui n'a pas beaucoup de sens dans ce cadre puisque, par un argument d'homothétie, on peut montrer (et nous le ferons au paragraphe § 5) que pour tout $\lambda > 0$ il existe une infinité de solutions pour $-\Delta u + \rho u = \lambda |u|^{p-1} u$. Nous verrons plus loin que si $(N-2)p = N+2$ et $N \geq 3$, alors en général J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale sur S ; cependant dans certains cas on peut montrer que J possède des valeurs critiques. Voir aussi *Exercices*, pour le cas où $\rho \in L^q(\Omega)$, avec $q > N/2$. □

2.5 Exemple. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la condition de Caratheodory (**1.**16.1), telle que p.p. en $x \in \Omega$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$ la dérivée $\partial_s g(x, s)$ existe et soit continue. On considère alors $G(x, s) := \int_0^s g(x, \sigma) d\sigma$ et :

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} J(v) := \displaystyle\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \left[a(x) \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) - \lambda v^2(x) \right] - G(x, v(x)) \right\} dx, \\ F(v) := \displaystyle\int_\Omega \left\{ \left[a(x) \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) - \lambda v^2(x) \right] - g(x, v(x)) v(x) \right\} dx, \\ S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \ ; \ F(v) = 0 \right\}. \end{cases}$$

On désigne enfin par A l'opérateur défini par $Av := -\text{div}\,(a(x) \nabla v)$ sur

$$D(A) := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ Av \in L^2(\Omega) \right\},$$

et par λ_1 la plus petite valeur propre de A, i.e.

$$\lambda_1 := \min \left\{ \langle Av, v \rangle \ ; \ v \in H_0^1(\Omega), \ \|v\|^2 = 1 \right\}.$$

(Ici, et à chaque fois que l'on ne le précise pas, $a(\cdot)$ est une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément coercive).

Nous allons montrer que, sous des hypothèses convenables, la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale sur l'ensemble de contraintes S. Pour la clarté de l'exposé nous ne chercherons pas à donner les conditions les plus générales, mais celles qui sont souvent remplies dans les applications courantes (voir aussi *Exercices*).

2.6 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p < N+2$. On suppose que la fonction $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet, p.p. sur Ω, une dérivée continue $\partial_s g(x,s)$, est telle que $g(x,0) = \partial_s g(x,0) = 0$ et vérifie la condition de Caratheodory (***1.***16.1) ainsi que les conditions suivantes (on suppose que $g(x,s) \not\equiv 0$) :*

$$\exists b \geq 0, \qquad |\partial_s g(x,s)| \leq b(1+|s|^{p-1}) \tag{2.4}$$

$$\exists \theta > 2, \quad \textit{tel que } \forall s \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq \theta G(x,s) \leq s g(x,s) \tag{2.5}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \textit{tel que } \forall s \in \mathbb{R}, \qquad s^2 \partial_s g(x,s) \geq (1+\varepsilon_0) s g(x,s). \tag{2.6}$$

Alors J, F, S étant définies par (2.3) et $\lambda < \lambda_1$ étant fixé, on a les propriétés suivantes :
(i) *J est de classe C^2 et F est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$.*
(ii) *$S \neq \varnothing$ et pour tout $v \in S$ on a $\langle F'(v), v\rangle < 0$; de plus il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $v \in S$ on ait $\|\nabla v\| \geq \delta$.*
(iii) *La fonction J vérifie la condition de Palais-Smale sur S.*

Démonstration. Nous devons faire remarquer avant tout que $F(v) = \langle J'(v), v\rangle$. Du fait que $\partial_s g(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition de croissance (2.4), en utilisant les résultats du paragraphe § **1.**17, on voit facilement que J est de classe C^2 et que F est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$, ce qui établit (i).

La condition (2.6) et le fait que $g \not\equiv 0$ impliquent que $S \neq \varnothing$. En effet, (par exemple) il existe $s_0 > 0$ tel que $g(x,s_0) \geq 0$ et $g(x,s_0) \not\equiv 0$. Alors d'après (2.6), pour $s \geq s_0$ on a $g(x,s) \geq g(x,s_0) s_0^{-1-\varepsilon_0} s^{1+\varepsilon_0}$. Par conséquent en posant

$$m(x) := g(x,s_0) s_0^{-1-\varepsilon_0},$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $v \geq 0$ et $mv \not\equiv 0$, pour une constante $C \geq 0$ et pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} F(tv) \leq t^2 \int_\Omega \left[a(x)\nabla\ v(x) \cdot \nabla v(x) - \lambda v^2(x)\right] dx \\ - t^{2+\varepsilon_0} \int_\Omega m(x) |v(x)|^{2+\varepsilon_0} dx + C, \end{aligned} \tag{2.7}$$

ce qui montre que $F(tv) < 0$ pour $t > 0$ assez grand. D'autre part comme pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. sur } \ \Omega, \qquad s g(x,s) \leq \varepsilon |s|^2 + C(\varepsilon) |s|^{p+1}, \tag{2.8}$$

on conclut, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\lambda + \varepsilon < \lambda_1$, que $F(tv) > 0$ si $t > 0$ est assez petit. Par conséquent il existe $t_0 > 0$ tel que $t_0 v \in S$.

Pour montrer (ii), commençons par noter que si $v \in S$, i.e. $F(v) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\langle F'(v), v\rangle &= 2\int_\Omega \left[a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x) - \lambda v^2(x)\right] dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left[v^2(x)\partial_s g(x, v(x)) + v(x)g(x, v(x))\right] dx, \\
\langle F'(v), v\rangle &= -\int_\Omega \left[v^2(x)\partial_s g(x, v(x)) - v(x)g(x, v(x))\right] dx, \qquad (2.9)\\
&\leq -\varepsilon_0 \int_\Omega v(x)g(x, v(x))dx \\
&= -\varepsilon_0 \int_\Omega \left[a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x) - \lambda v^2(x)\right] dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent puisque $v \neq 0$, et que $\lambda < \lambda_1$, on a $\langle F'(v), v\rangle < 0$. Par ailleurs si $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\lambda + \varepsilon < \lambda_1$, en utilisant (2.8), l'inégalité de Sobolev $\|v\|_{p+1} \leq C\|\nabla v\|$ et la définition de λ_1, on a pour tout $v \in S$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)\nabla v(x).\nabla v(x)dx &\leq (\lambda+\varepsilon)\int_\Omega v^2(x)dx \\
&\qquad + C_\varepsilon \int_\Omega |v(x)|^{p+1}dx, \\
&\leq \frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda_1}\int_\Omega a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)dx \\
&\qquad + C(\varepsilon)\|\nabla v\|^{p+1},
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement $\alpha(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)/\lambda_1 \leq C(\varepsilon)\|\nabla v\|^{p-1}$, en utilisant la coercivité de la matrice $a(\cdot)$. Cela achève la preuve de (ii).

Pour montrer que J satisfait la condition de Palais-Smale sur S, on considère une suite $(u_n, \mu_n) \in S \times \mathbb{R}$ telle que $J(u_n) \to c$ et $h_n := J'(u_n) - \mu_n F'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Dans un premier temps on va montrer que μ_n tend vers zéro et que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Comme on a $\langle h_n, u_n\rangle = -\mu_n\langle F'(u_n), u_n\rangle$, en se rappelant l'égalité (2.9), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|\mu_n|\varepsilon_0 &\int_\Omega \left[a(x)\nabla u_n(x)\cdot\nabla u_n(x) - \lambda|u_n(x)|^2\right] dx \\
&= |\mu_n|\varepsilon_0 \int_\Omega u_n(x)g(x, u_n(x))dx \\
&\leq |\mu_n| \int_\Omega \left(|u_n(x)|^2\partial_s g(x, u_n(x)) - u_n(x)g(x, u_n(x))\right) dx \\
&= -|\mu_n|\,\langle F'(u_n), u_n\rangle = |\langle h_n, u_n\rangle| \\
&\leq \|h_n\|_{H^{-1}(\Omega)}\,\|\nabla u_n\|\,.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lambda < \lambda_1$, on déduit que pour une constante $C > 0$ on a $|\mu_n|\,\|\nabla u_n\| \leq C\|h_n\|_{H^{-1}(\Omega)}$, c'est à dire que $\mu_n u_n$ tend vers zéro

dans $H_0^1(\Omega)$. Du fait que $\|\nabla u_n\| \geq \delta$, on conclut que μ_n tend vers zéro et $\mu_n \Delta u_n$ tend vers zéro dans $H^{-1}(\Omega)$. En utilisant le fait que $2J(u_n) = \int_\Omega [u_n(x)g(x,u_n(x)) - 2G(x,u_n(x))]\,dx$ et en rappelant la condition (2.5), on conclut que :

$$0 \leq (\theta - 2)\int_\Omega G(x,u_n(x))dx \leq 2J(u_n).$$

Comme $\theta > 2$, cela implique que $\int_\Omega G(x,u_n(x))dx$ est bornée et que par conséquent $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En extrayant une sous-suite $(u_{n_i})_i$ qui converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$-faible et dans $L^q(\Omega)$-fort pour tout q tel que $(N-2)q < 2N$, on dispose d'une sous-suite telle que $g(\cdot,u_{n_i})$ et $u_{n_i}\partial_s g(\cdot,u_{n_i})$ convergent vers $g(\cdot,u)$ et $u\partial_s g(\cdot,u)$ dans $L^{(p+1)/p}(\Omega)$ donc dans $H^{-1}(\Omega)$. En particulier $\mu_{n_i}F'(u_{n_i})$ tend vers zéro dans $H^{-1}(\Omega)$ et, si on désigne encore par A l'extension de A comme isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} u_{n_i} &= (A-\lambda I)^{-1}\left[g(\cdot,u_{n_i}) + \mu_{n_i}F'(u_{n_i}) + h_{n_i}\right] \\ &\to (A-\lambda I)^{-1} g(\cdot,u), \end{aligned}$$

dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui termine la preuve du point (iii). □

2.7 Remarque. Lorsque $\lambda \geq \lambda_1$, l'origine est un point adhérent de S. Cependant on peut montrer que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S à tout niveau $c > 0$ (voir à ce sujet *Exercices*). □

3. Champ de pseudo-gradient tangent

Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ et S définie comme en (2.1) ; on supposera, comme nous l'avons déjà dit, que F vérifie la condition (2.2). Si $J \in C^1(X,\mathbb{R})$, pour tout $x \in S$ on pose :

$$\|J'(x)\|_* = \sup\left\{\langle J'(x),y\rangle \;;\; y \in X,\ \|y\| = 1,\ \text{ et }\ \langle F'(x),y\rangle = 0\right\}. \tag{3.1}$$

Noter que la condition $\|J'(x)\|_* = 0$ et $x \in S$ signifie précisément que pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $J'(x) = \lambda F'(x)$, c'est-à-dire que x est un point critique de J sur S. En d'autres termes, $\|J'(x)\|_*$ est la norme de la *projection* de $J'(x)$ sur l'hyperplan tangent à S en x. On notera que si X est un espace de Banach réflexif, alors $\|J'(x)\|_*$ est atteint en un point y_x ; si de plus la norme de X est strictement convexe, alors y_x est unique.

3.1 Définition. *Soient X un espace de Banach, $J, F \in C^1(X,\mathbb{R})$, S définie par (2.1), F vérifiant (2.2). Pour tout $u \in S$, on dit que $v \in X$ est un* **pseudo-gradient tangent** *(à S) de J en u, si on a :*

$$\begin{cases} \|v\| \leq 2\|J'(u)\|_*, \\ \langle J'(u),v\rangle \geq \|J'(u)\|_*^2, \qquad \langle F'(u),v\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

En désignant par $S_r := \{u \in S \;;\; \forall \lambda \in \mathbb{R},\ J'(u) - \lambda F'(u) \neq 0\}$ l'ensemble des points réguliers (i.e. non critiques) de J sur S, une application $V : S_r \longrightarrow X$

est appelée **champ de pseudo-gradient tangent** *de J si V est localement lipschitzienne sur S_r et pour tout $u \in S_r$, $V(u)$ est un pseudo-gradient tangent de J en u.*

On notera que l'ensemble des pseudo-gradients tangents de J en un point fixé u est convexe. Donc, si V_1, V_2 sont deux champs de p.g. tangent de J, alors pour tout $\theta \in [0,1]$ il en est de même de $\theta V_1 + (1-\theta)V_2$.

En ce qui concerne l'existence d'un champ de p.g. tangent, on doit supposer (du moins nous semble-t-il) que la fonction F définissant la variété S est un peu plus que de classe C^1. On désignera par $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ telles que F' est localement lipschitzienne de X dans X'.

3.2 Lemme. *Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$, $F \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$, S définie par (2.1). On suppose que F vérifie (2.2) et que J n'est pas constante sur S. Alors il existe V, un champ de p.g. tangent de J sur S_r, tel que V soit défini et localement lipschitzien sur un voisinage ouvert $\widetilde{S}_r$ de S_r. De plus si F et J sont paires, on peut choisir $\widetilde{S}_r$ symétrique par rapport à l'origine et V impair.*

Démonstration. Soit $u_0 \in S_r$. D'après la définition de $\|J'(u_0)\|_*$ par (3.1), il existe $y_0 \in X$ tel que

$$\|y_0\| = 1, \quad \langle F'(u_0), y_0\rangle = 0, \quad \text{et} \quad \langle J'(u_0), y_0\rangle \geq \frac{2}{3}\|J'(u_0)\|_*.$$

En posant alors $v_0 := \frac{5}{3}\|J'(u_0)\|_* y_0$, on a donc :

$$\begin{cases} \|v_0\| = \dfrac{5}{3}\|J'(u_0)\|_*, \\ \langle J'(u_0), v_0\rangle \geq \dfrac{10}{9}\|J'(u_0)\|_*^2, \qquad \langle F'(u_0), v_0\rangle = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant $z_0 \in X$ tel que $\|z_0\| = 1$ et

$$\langle F'(u_0), z_0\rangle \geq \frac{2}{3}\|F'(u_0)\|.$$

(Un tel z_0 existe puisque par hypothèse $u_0 \in S$, donc $F'(u_0) \neq 0$). Soit alors

$$x_0 := \frac{z_0}{\langle F'(u_0), z_0\rangle},$$

de sorte que $\langle F'(u_0), x_0\rangle = 1$ et $\|x_0\|\,\|F'(u_0)\| \leq 3/2$. Il est clair qu'il existe $R_1 := R_1(u_0) > 0$ tel que pour tout $u \in B(u_0, R_1)$ on ait :

$$\langle F'(u), x_0\rangle \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \|x_0\|\,\|F'(u)\| \leq 2.$$

Alors, en posant pour $u \in B(u_0, R)$ avec $R := R(u_0) < R_1$ et R assez petit

$$v := v(u, u_0) := v_0 - \frac{\langle F'(u), v_0\rangle}{\langle F'(u), x_0\rangle} x_0,$$

on vérifie sans peine que $v(u,u_0)$ est un p.g. tangent de J en tout $u \in B(u_0,R)\cap S_r$ et que $u \mapsto v(u,u_0)$ est localement lipschitzienne sur $B(u_0,R(u_0))$ (c'est ici que l'on a besoin de l'hypothèse sur F'). En considérant $\widetilde{S}_r := \cup_{u_0\in S_r} B(u_0,R(u_0))$, comme $\widetilde{S}_r$ est paracompact (voir la démonstration du lemme **3.**7.4), on peut trouver un recouvrement localement fini $(\omega_j)_{j\in I}$ plus fin que $(B(u_0,R(u_0)))_{u_0\in S_r}$ et une partition de l'unité localement lipschitzienne $(\theta_j)_{j\in I}$ subordonnée à $(\omega_j)_{j\in I}$. Sachant que pour chaque $j\in I$ il existe $u_{0j}\in S_r$ tel que $\omega_j \subset B(u_{0j},R(u_{0j}))$, en posant :

$$V(u) := \sum_{j\in I} \theta_j(u) v(u,u_{0j}),$$

on obtient un champ de pseudo-gradient tangent de J sur S_r, défini et localement lipschitzien sur un voisinage de S_r.

Si on suppose que F et J sont paires, on peut vérifier sans difficulté qu'en remplaçant $R(u_0)$ par $\min\left(R(u_0),R(-u_0)\right)$, on peut choisir $\widetilde{S}_r$ (tout comme S_r) symétrique par rapport à l'origine. Ensuite, V étant donné plus haut, en posant $V_2(u) := -V(-u)$, V_2 est aussi un champ de p.g. tangent défini sur $\widetilde{S}_r$. En considérant alors $V_1(u) := \left(V(u)+V_2(u)\right)/2$, on obtient un champ de p.g. tangent et impair. □

3.3 Remarque. Nous devons attirer l'attention sur le fait qu'ici nous avons énoncé la définition de la condition de Palais-Smale et celle de champ pseudo-gradient tangent dans le cadre particulier de S, mais on peut faire tout ce que nous venons de voir lorsque l'on souhaite travailler avec une variété M *modelée* sur un espace de Banach. Cependant la construction du champ de p.g. tangent à M est essentiellement la même que celle que nous avons exposée, en utilisant des cartes locales (voir par exemple R.S. Palais [125, 126, 127], J.T. Schwartz [148], F.E. Browder [37]). De même lorsque S est définie avec un nombre fini de contraintes, i.e.

$$S := \{v\in X\ ;\ F_j(v)=0, \quad 1\le j\le m\}\ ,$$

où les fonctions F_j sont dans $C^{1,1}_{\rm loc}(X,\mathbb{R})$ et sont telles que les $F_j'(v)$ sont linéairement indépendants pour tout $v\in S$, on peut facilement montrer l'existence d'un champ de p.g. tangent (voir *Exercices*).

Nous devons également insister sur le fait qu'en général, même lorsque l'espace de Banach X est de dimension finie, pour la construction du flot de J sur S de façon unique et continue, on a besoin de l'hypothèse supplémentaire que F' soit localement lipschitzienne. Cela revient à dire que les variations de la normale à S sont *contrôlées* de manière localement lipschitzienne. □

4. Le lemme de déformation

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme de déformation pour une fonction J considérée sur une variété comme S définie en (2.1). Dans tout ce qui suit on peut supposer que la fonction $J : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 dans un voisinage de S mais, pour la simplicité, on énonce les divers résultats pour une fonction définie sur X. Rappelons que dans ce cadre $[J \leq a]$ désigne l'ensemble des $x \in S$ tels que $J(x) \leq a$.

4.1 Lemme de déformation. *Soient X un espace de Banach, $F \in C^{1,1}_{\rm loc}(X, \mathbb{R})$, S définie par (2.1) et vérifiant (2.2). On suppose que $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $J := E_{|S}$ vérifie la condition de Palais-Smale sur S ; on suppose enfin que J n'est pas constante sur S et que $c \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur critique de J sur S. Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une application $\eta \in C(\mathbb{R} \times S, S)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1) *Pour tout $u \in S$, on a $\eta(0, u) = u$.*

2) *Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, on a $\eta(t, u) = u$.*

3) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de S dans S.*

4) *Pour tout $u \in S$, la fonction $t \mapsto J(\eta(t, u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

5) *Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, alors $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.*

6) *Si J et F sont paires, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme impair.*

Démonstration. On sait qu'il existe un voisinage ouvert $\widetilde{S}_r$ de S_r (l'ensemble des points réguliers de J sur S) et V un champ de pseudo-gradient tangent de J tels que V est localement lipschitzien sur $\widetilde{S}_r$ (on prendra soin de choisir V impair lorsque J et F sont paires). Comme c est une valeur régulière de J sur S et J satisfait la condition de Palais-Smale, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J(u) \leq c + \varepsilon_1], \qquad \|J'(u)\|_* \geq \delta.$$

On peut prendre de plus $\delta \leq 1$ et on pose $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon_1, \delta^2/8)$. Pour $v \in S_r$, soit $\Omega(v) := B(v, \frac{1}{2} d(v, (\widetilde{S}_r)^c))$ et $\Omega := \cup_{v \in S_r} \Omega(v)$. Puis pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, en considérant :

$$A := [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0] \cup \Omega^c, \qquad B := [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon],$$

on prend $\alpha(x) := d(x, A)/\left(d(x, A) + d(x, B)\right)$, de sorte que $\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in B$, et $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in A$, et α est localement lipschitzienne sur X. Lorsque F et J sont des fonctions paires, A et B sont symétriques par rapport à l'origine et α est une fonction paire.

Soit alors $W(x) := \alpha(x) \min\left(1, 1/\|V(x)\|\right) V(x)$ pour $x \in X$. On peut vérifier que W est localement lipschitzien sur X, et que $\|W(x)\| \leq 1$, pour tout $x \in X$; par conséquent pour tout $x \in X$ donné, il existe une unique solution de l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\eta(t,x)}{dt} = -W(\eta(t,x)) \\ \eta(0,x) = x \end{array} \right. \tag{4.1}$$

définie sur $\mathbb{R}$. On sait aussi (voir la démonstration du lemme de déformation **3.**7.4) que $\eta \in C^1(\mathbb{R}, X)$, que $\eta(t, \eta(s,x)) = \eta(t+s, x)$ et que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t,\cdot)$ est un homéomorphisme de X dans X. On vérifie sans difficulté que les propriétés 1) et 2) sont satisfaites. Pour la propriété 3), on doit vérifier que si $u \in S$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\eta(t,u) \in S$. Le seul cas où une difficulté pourrait surgir est lorsque $u \in [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$. Mais dans ce cas, comme $t \mapsto \eta(t,u)$ est continue et que $u \in S_r$, pour t assez petit $\eta(t,u)$ reste dans l'ouvert $\widetilde{S}_r$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\eta(t,u)) &= \langle F'(\eta(t,u)), \frac{d}{dt}\eta(t,u)\rangle \\ &= -\alpha(\eta)\min(1, 1/\|V(\eta)\|)\,\langle F'(\eta), V(\eta)\rangle. \end{aligned}$$

Mais comme par définition du champ pseudo-gradient tangent on a

$$\langle F'(\eta), V(\eta)\rangle = 0\,,$$

on conclut que $F(\eta(t,u))$ est constant pour t assez petit, et par conséquent $\eta(t,u)$ reste finalement sur S pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les autres propriétés de η se vérifient en suivant point par point la démarche que nous avons suivie pour démontrer le lemme de déformation **3.**7.4. □

Comme nous l'avons vu au paragraphe § **3.**7, on peut montrer une version plus précise du lemme de déformation 4.1, dont la démonstration est identique à celle du théorème **3.**7.6 :

4.2 Théorème (M. Morse). *Soient X un espace de Banach, $F \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$ et S comme en (2.1) et (2.2). Si $E \in C^1(X,\mathbb{R})$ et $J := E_{|S}$ n'est pas constante sur S, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ qui est valeur régulière de J sur S, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, l'ensemble $[J \leq c - \varepsilon]$ est une déformation rétracte de $[J \leq c + \varepsilon]$.*

On peut également énoncer un principe de *min-max* ou *inf-sup* sur les variétés, et nous laissons la démonstration au lecteur (voir aussi théorème **3.**7.8).

4.3 Principe de min-max. *Soient X un espace de Banach, $F \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$ et S comme en (2.1) et (2.2). Soient $E \in C^1(X,\mathbb{R})$ telle que $J := E_{|S}$ n'est pas constante et vérifie la condition de Palais-Smale sur S et $\mathscr{B}$ une famille non vide de parties non vides de S. On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1,\cdot)$ construit dans le lemme de déformation 4.1 respecte $\mathscr{B}$ (i.e. si $A \in \mathscr{B}$, on a aussi $\eta(1,A) \in \mathscr{B}$). On pose :*

$$c_* := \inf_{A \in \mathscr{B}} \sup_{v \in A} J(v).$$

Si $c_* \in \mathbb{R}$, alors c_* est une valeur critique de J sur S.

Au paragraphe suivant nous allons étudier quelques exemples d'application de ce *principe*.

5. Quelques applications du principe de min-max

Comme nous l'avons signalé précédemment, les techniques que nous discutons dans ce chapitre ont leur origine dans le résultat suivant de L. Ljusternik & L. Schnirelman [107], démontré à l'origine en utilisant la notion de catégorie (sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$), mais que nous montrons ici en utilisant la notion de genre (défini au paragraphe § **2.**4) :

5.1 Théorème (Ljusternick & Schnirelmann). *Soit E une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sur la sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme euclidienne), on considère la fonction $J(u) := E(u)$ pour $u \in S^{n-1}$. Alors J admet au moins n paires de points critiques sur S^{n-1}, i.e. il existe (au moins) n couples (u_k, λ_k) avec $u_k \in S^{n-1}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $E'(u_k) = \lambda_k u_k$ pour $1 \leq k \leq n$ (naturellement $(-u_k, \lambda_k)$ possède la même propriété).*

Démonstration. Rappelons que $s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des parties non vides, fermées de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas 0 et qui sont symétriques par rapport à l'origine, et que $\gamma(A)$ est le genre de A, lorsque $A \in s(\mathbb{R}^n)$. Soit, pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mathscr{B}_k := \left\{A \subset S^{n-1} \ ; \ A \in s(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \gamma(A) \geq k\right\}.$$

On a $\mathscr{B}_k \supset \mathscr{B}_{k+1} \neq \varnothing$ si $1 \leq k \leq n-1$ (noter que $\mathscr{B}_{n+1} = \varnothing$). On définit alors :

$$c_k := \inf_{A \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in A} J(v).$$

En posant $F(x) := \|x\|^2 - 1$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $S := S^{n-1}$, les hypothèses du lemme de déformation 4.1 sont remplies et $\mathscr{B}_k$ est stable par le flot impair $\eta(1, \cdot)$ de J sur S^{n-1}. Par conséquent, d'après le principe de min-max 4.3, chaque c_k est une valeur critique de J sur S^{n-1}. De plus $c_k \leq c_{k+1}$ si $1 \leq k \leq n-1$; on voit donc que si tous les c_k sont distincts alors J possède n valeurs critiques distinctes, i.e. n paires de points critiques. Pour montrer le théorème, il nous reste à établir le lemme suivant (rappelons que si $\gamma(A) \geq 2$ alors A contient une infinité de points) :

5.2 Lemme. *Si pour des entiers $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq j \leq n-k$ on a $c_k = c_{k+j}$, alors l'ensemble*

$$K(c_k) := \left\{u \in S^{n-1} \ ; \ J(u) = c_k \ \text{ et } \ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } E'(u) = \lambda u\right\}$$

est de genre au moins $j+1$ (i.e. $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$).

Comme ce résultat est vrai indépendamment du fait que l'on soit dans le cadre d'un espace de dimension finie, nous allons montrer un résultat analogue dans un cadre plus général.

5.3 Théorème. *Soient X un espace de Banach, $F \in C^{1,1}_{\text{loc}}(X, \mathbb{R})$, S définie par (2.1) et vérifiant (2.2), $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $J := E_{|S}$. On suppose que F et J sont paires, que J n'est pas constante, satisfait la condition de Palais-Smale sur S et que $0 \notin S$. Pour tout entier $k \geq 1$ on pose :*

$$\mathscr{B}_k := \{A \in s(X)\ ;\ A \subset S,\ et\ \gamma(A) \geq k\} \quad et \quad c_k := \inf_{A \in \mathscr{B}_k} \sup_{v \in A} J(v).$$

(i) *Pour tout $k \geq 1$ tel que $\mathscr{B}_k \neq \varnothing$ et $c_k \in \mathbb{R}$, c_k est une valeur critique de J sur S. De plus $c_k \leq c_{k+1}$, et si pour un entier $j \geq 1$ on a $\mathscr{B}_{k+j} \neq \varnothing$ et $c_k = c_{k+j} \in \mathbb{R}$, alors $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$, où :*

$$K(c_k) := \{u \in S\ ;\ J(u) = c_k,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ t.q.\ \ E'(u) = \lambda F'(u)\}.$$

(ii) *Si pour tout $k \geq 1$ on a $\mathscr{B}_k \neq \varnothing$ et $c_k \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty.$$

Démonstration. Comme la suite $\mathscr{B}_k$ est décroissante, il est clair que $c_k \leq c_{k+1}$, chaque fois que $\mathscr{B}_{k+1} \neq \varnothing$. Si $c_k \in \mathbb{R}$ (en supposant $\mathscr{B}_k \neq \varnothing$), il est clair que le flot η construit dans le lemme de déformation 4.1 respecte $\mathscr{B}_k$ en ce sens que si $A \in \mathscr{B}_k$, alors $\eta(1, A) \in \mathscr{B}_k$. Par conséquent, d'après le principe de min-max 4.3, c_k est une valeur critique de J sur S.

Supposons que $\mathscr{B}_{k+j} \neq \varnothing$ et que $c_k = c_{k+j} \in \mathbb{R}$. Comme J vérifie la condition de Palais-Smale sur S, on sait que $K(c_k)$ est compact, donc de genre fini. En raisonnant par l'absurde nous allons montrer que $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$. Si $\gamma(K(c_k)) \leq j$, on peut voir facilement (en utilisant la propriété (vi) du théorème **2.**4.4) qu'il existe $\tau > 0$ tel que, si $\omega := \{v \in S\ ;\ \mathrm{dist}(v, K) < \tau\}$ et $\widetilde{K} := \overline{\omega}$, on ait $\gamma(\widetilde{K}) = \gamma(K(c_k))$. Ensuite (en utilisant de nouveau le fait que J satisfait la condition de Palais-Smale), on montre qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ (avec $\delta \leq 1$) tels que :

$$\forall v \in [J \leq c_k + \varepsilon_1] \setminus ([J < c_k - \varepsilon_1] \cup \omega), \qquad \|J'(v)\|_* \geq \delta.$$

Soit $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon_1, \delta^2/8)$. D'après le lemme 3.2, il existe un champ de pseudo-gradient tangent V impair et un voisinage ouvert $\widetilde{S}_r$ symétrique par rapport à l'origine sur lequel V est défini et localement lipschitzien. Soit enfin $R(v) := \frac{1}{2}\min(\|v\|, d(v, (\widetilde{S}_r)^c))$ pour $v \in S_r$, et

$$\Omega := \cup_{v \in S_r} B(v, R(v)).$$

Si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on choisit maintenant une fonction localement lipschitzienne $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ telle que :

$$\begin{aligned} &\alpha(v) = 0 \quad \text{si} \ \ v \in [J \leq c_k - \varepsilon_0] \cup [J \geq c_k + \varepsilon_0] \cup \widetilde{K} \cup \Omega^c, \\ &\alpha(v) = 1 \quad \text{si} \ \ v \in [c_k - \varepsilon \leq J \leq c_k + \varepsilon] \setminus \omega. \end{aligned}$$

On construit ensuite le flot $\eta(t, x)$ comme solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\eta(t, x) = -\alpha(\eta)\min(1, 1/\|V(\eta)\|)\, V(\eta), \qquad \eta(0, x) = x \in S$$

et, exactement comme dans la démonstration du lemme 4.1, on montre que $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme impair de S dans S et que $\eta(1, [J \leq c_k + \varepsilon] \setminus \omega) \subset$

$[J \leq c_k - \varepsilon]$. Si $A \in \mathscr{B}_{k+j}$ est tel que $c_k \leq \sup_{v\in A} J(v) \leq c_k + \varepsilon$, d'après la propriété (vii) du théorème **2.**4.4, on a :

$$\gamma\left(\overline{A \setminus \widetilde{K}}\right) \geq \gamma(A) - \gamma(\widetilde{K}) \geq k + j - j.$$

Mais en posant $B := \eta\left(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}}\right)$, puisque $\eta(1,\cdot)$ est un homéomorphisme de S dans lui-même, d'après l'inégalité ci-dessus on a $B \in \mathscr{B}_k$. Cela conduit donc à l'inégalité $c_k \leq \sup_{v\in B} J(v) \leq c_k - \varepsilon$ qui est impossible. Par conséquent on a $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$ et le point (i) du théorème est prouvé.

Pour montrer le point (ii), remarquons tout d'abord qu'il est impossible que la suite soit stationnaire, i.e. que pour un entier $k \geq 1$ on ait $c_k = c_{k+j}$ pour tout $j \geq 1$. En effet on sait que J vérifie la condition de Palais-Smale et par conséquent $K(c_k)$ est compact, donc de genre fini, alors que si $c_k = c_{k+j}$ on a $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$, ce qui n'est possible que pour un nombre fini de j. On en conclut que si c_k ne tend pas vers l'infini, la seule possibilité pour $(c_k)_k$ est de converger vers $c \in \mathbb{R}$ avec $c > c_k$ pour tout $k \geq 1$. Mais dans ce cas :

$$K := \{u \in S\ ;\ c_1 \leq J(u) \leq c, \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \ E'(u) = \lambda u\}\,,$$

est compact (car J vérifie la condition de Palais-Smale), donc de genre fini, par exemple $\gamma(K) =: n$. En reprenant le raisonnement ci-dessus, on peut trouver $\tau > 0$ assez petit tel que si

$$\omega := \{v \in S\ ;\ \mathrm{dist}(v, K) < \tau\}\,,$$

et $\widetilde{K} := \overline{\omega}$, alors $\gamma(\widetilde{K}) = \gamma(K) = n$. On trouve alors ε_1 et $\delta > 0$ comme ci-dessus et on pose $\varepsilon_0 := \min\left(\varepsilon_1, \delta^2/8, c_1/2, (c - c_1)/2\right)$ et ensuite pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on construit le flot η de sorte que $\eta(1, [J \leq c + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c - \varepsilon]$. Maintenant si $k \geq 1$ est un entier tel que $c_k > c - \varepsilon$, on peut prendre $A_0 \in \mathscr{B}_{k+n}$ tel que $\sup_{v\in A_0} J(v) \leq c + \varepsilon$. Mais en posant $A := A_0 \setminus \omega$, on sait que $A \in \mathscr{B}_k$ et que $M := \eta(1, A) \in \mathscr{B}_k$. On a donc $c_k \leq \sup_{v\in M} J(v)$ et en même temps $M \subset [J \leq c - \varepsilon]$, ce qui est impossible puisque par hypothèse $c - \varepsilon < c_k$. □

5.4 Remarque. On peut définir les c_k par

$$c_k := \inf\{c \in \mathbb{R}\ ;\ \gamma([J \leq c]) \geq k\}\,,$$

et on voit ainsi que les c_k sont des valeurs pour lesquelles il y a un changement qualitatif dans les ensembles $[J \leq c]$.

On notera aussi que, suivant le type de problèmes à traiter, on peut changer les conditions sur A dans la définition de $\mathscr{B}_k$. Par exemple, on peut exiger que A soit exactement de genre k, ou que A soit compact, ou bien qu'il soit l'image d'une sphère S^{k-1} de $\mathbb{R}^k$, etc. En ajoutant l'hypothèse que les éléments de $\mathscr{B}_k$ sont compacts, on peut aussi remplacer inf sup par inf max dans la définition de c_k. Cependant il faut prendre garde de ne pas affirmer *a priori* que les différents c_k construits de cette façon sont identiques. De même il se peut que le résultat

plus précis concernant la multiplicité des points critiques, lorsque $c_k = c_{k+j}$, ne subsiste plus. □

Comme dans un espace de dimension infinie la sphère unité est de genre infini, elle contient des ensembles de genre k, pour tout $k \geq 1$. On peut alors déduire du théorème 5.3 cette généralisation du théorème de Ljusternik-Schnirelman dans le cas d'un espace de dimension infinie :

5.5 Théorème. *Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie, $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ une fonction paire et $J := E_{|S}$ où S est la sphère unité de H. On suppose que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S, est minorée et n'est pas constante. Alors J possède une infinité de (paires de) points critiques sur S. Plus précisément, si $\mathscr{B}_k := \{A \in s(H)\ ;\ A \subset S,\ A \text{ compact et } \gamma(A) \geq k\}$ et*

$$c_k := \inf_{A \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in A} J(v),$$

c_k est une valeur critique de J sur S, $c_k \leq c_{k+1}$ et si $c_k = c_{k+j}$ alors $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$. De plus $\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty$.

5.6 Remarque. Comme toujours $s(H)$ est l'ensemble des parties non vides et fermées de H, ne contenant pas 0 et qui sont symétriques par rapport à l'origine. Par ailleurs on notera que si H est un espace de Banach de dimension infinie telle que sa norme $\|\cdot\|$ est de classe $C^{1,1}_{\text{loc}}$ sur $H \setminus \{0\}$, le résultat du théorème ci-dessus reste vrai. □

5.7 Exemple. Soit $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte défini sur un espace de Hilbert séparable H_0 et à valeurs dans H_0. On suppose que pour tout $u \in D(A)$ on a $(Au|u) \geq 0$, où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire de H_0, identifié à son dual. On désigne par H le domaine de $A^{1/2}$, et on convient d'écrire $(Au|u)$ au lieu de $(A^{1/2}u|A^{1/2}u)$. On a vu à l'exemple 2.2 que $J(u) := (Au|u)$, défini sur H, satisfait la condition de Palais-Smale sur $S := \{v \in H\ ;\ (u|u) = 1\}$. Par conséquent pour tout entier $k \geq 1$ tel que $\gamma(S) \geq k$, le nombre :

$$c_k := \inf_{M \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in M} J(v)\,,$$

où $\mathscr{B}_k := \{M \in s(H)\ ;\ M \text{ compact} \subset S,\ \gamma(M) \geq k\}$, est une valeur critique de J, donc une valeur propre de A. Si H_0 est de dimension finie n on retrouve le résultat bien connu concernant l'existence de n valeurs propres pour une matrice symétrique $n \times n$ (ou une application linéaire auto-adjointe de H_0 dans lui-même). Si H_0 est de dimension infinie, on sait d'après le théorème 5.5 qu'il existe une infinité de c_k (qui sont toutes valeurs propres de A) et que $c_k \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$. En fait on peut montrer dans ce cas que toutes les valeurs propres de A sont obtenues de cette façon, i.e. que le spectre de A est précisément $\text{Sp}(A) = \{c_k\ ;\ k \geq 1\}$. En effet considérons les *quotients de Rayleigh* :

$$Q(v) := \frac{(Av|v)}{(v|v)}\,,$$

pour $v \in H$ et $v \neq 0$; on peut montrer le *principe de Courant-Fischer* qui affirme que les valeurs propres de A peuvent être caractérisées par

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \lambda_k := \inf\limits_{E\in\mathscr{F}_k} \sup\limits_{v\in E\setminus\{0\}} Q(v) = \inf\limits_{E\in\mathscr{F}_k} \sup\limits_{v\in E\cap S} J(v), \\ \mathscr{F}_k := \{E\ ;\ E \text{ s.e.v. de } H,\ k \leq \dim(E) < \infty\} \end{cases}$$

(voir R. Courant [48], E. Fischer [65] et R. Courant & D. Hilbert [50], et *Exercices*). Nous allons montrer que $c_k = \lambda_k$; en effet soient $k \geq 1$ et $u_i \in S$ tel que $Au_i = c_i u_i$, pour un $i \overset{\geq}{\leq} {}^{1}_{k}$. On commence par remarquer que A étant auto-adjoint, si $c_i \neq c_j$ alors on a $(u_i|u_j) = 0$ et, si $c_i = c_j$, on peut choisir u_i et u_j tels que $(u_i|u_j) = 0$ dans le sous-espace propre associé à c_i (qui est de dimension finie). Si E_k désigne le sous-espace engendré par $u_1, \ldots, u_k$, on a $\dim(E_k) = k$ et, par suite,

$$\max_{v\in E_k\cap S} J(v) = c_k \geq \inf_{E\in\mathscr{F}_k} \sup_{v\in E\cap S} J(v) = \lambda_k.$$

D'autre part, il est évident que pour tout $E \in \mathscr{F}_k$ on a $E \cap S \in \mathscr{B}_k$. On en conclut donc que $c_k \leq \lambda_k$ et, finalement, $c_k = \lambda_k$.

Nous ferons également remarquer que, pour définir les c_k, on peut remplacer les ensembles $\mathscr{B}_k$ par toute autre famille suffisamment riche d'ensembles de genre au moins égal à k. Par exemple, si S^{k-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^k$ et

$$\widetilde{\mathscr{B}}_k := \left\{h(S^{k-1})\ ;\ h \in C(S^{k-1}, S) \ \text{ impaire}\right\},$$

on vérifie que $c_k = \inf_{B\in\widetilde{\mathscr{B}}_k} \max_{v\in B} J(v)$. □

5.8 Remarque. On peut montrer directement, en considérant le champ de pseudo-gradient tangent défini par $V(u) := Au - (Au|u)u$, que λ_k défini par (5.1) est valeur critique de J sur S, donc valeur propre de A (voir *Exercices*). □

5.9 Exemple. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, soient une matrice symétrique $a(x) := (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément coercive et $p \geq 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. Pour une fonction $\rho \in L^\infty(\Omega)$ fixée et $u \in H_0^1(\Omega)$, on considère :

$$J(u) := \int_\Omega \left[a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x) + \rho(x)u^2(x)\right] dx$$
$$S := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = 1\right\}.$$

Nous avons vu à l'exemple 2.4 que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S. Par conséquent d'après le théorème 5.5, J possède une infinité de valeurs critiques $(c_k)_k$ sur S et de plus $c_k \to +\infty$. Si $p = 1$, les nombres c_k et les points critiques correspondants u_k sont précisément les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur elliptique

$$Lu := -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u) + \rho(\cdot)u,$$

sur le domaine $D(L) := \{v \in H_0^1(\Omega)\,;\, Lv \in L^2(\Omega)\}$. Si $p > 1$, il existe un multiplicateur de Lagrange $\mu_k \in \mathbb{R}$ et $u_k \in S$ tels que $J(u_k) = c_k$ et $Lu_k = \mu_k |u_k|^{p-1}u_k$. En multipliant par u_k on voit que $\mu_k = c_k$.

Si $c_k > 0$, ce qui est le cas pour une infinité d'indices k, alors en posant $\widetilde{u}_k := c_k^{1/(p-1)} u_k$ on vérifie que $\widetilde{u}_k$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x)\nabla \widetilde{u}_k) + \rho(x)\widetilde{u}_k = |\widetilde{u}_k|^{p-1}\widetilde{u}_k & \text{dans } \Omega\,, \\ \widetilde{u}_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui possède donc une infinité de solutions. Lorsque $c_k < 0$, ce qui peut arriver au plus pour un nombre fini (dépendant de ρ), éventuellement nul, d'indices k, alors en posant $v_k := |c_k|^{1/(p-1)} u_k$ on vérifie sans peine que v_k est solution du problème :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x)\nabla v_k) + \rho(x)v_k + |v_k|^{p-1}v_k = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ v_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

5.10 Exemple. Avec les notations de l'exemple 2.5, supposons que g satisfait les hypothèses de la proposition 2.6 et que $\lambda < \lambda_1$. Les fonctions J, F et l'ensemble S étant définis par (2.3), si $s \mapsto g(x,s)$ est impaire de classe $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, alors S est de classe $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, J est impaire, de classe C^2 et vérifie la condition de Palais-Smale sur S. Supposons de plus, pour simplifier la preuve de ce qui suit, que l'on ait

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad \text{p.p. sur } \Omega, \qquad G(x,s) > 0. \tag{5.2}$$

Alors, pourvu que l'on montre que S contient des ensembles de genre k (pour tout $k \geq 1$), le théorème 5.5 implique que J possède une infinité de valeurs critiques sur S, et donc il existe une suite $(u_k, \mu_k)_{k\geq 1} \in S \times \mathbb{R}$ telle que

$$J'(u_k) = \mu_k F'(u_k).$$

En calculant $\langle J'(u_k), u_k\rangle = \mu_k \langle F'(u_k), u_k\rangle$ et sachant que pour tout $v \in S$ on a $\langle F'(v), v\rangle < 0$ (cf. proposition 2.6 **(ii)**) et $0 = F(v) = \langle J'(v), v\rangle$, on conclut que pour tout $k \geq 1$ on a $\mu_k = 0$ et par conséquent $u_k \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u_k) = \lambda u_k + g(x, u_k) & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_k \not\equiv 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Pour montrer que S contient des ensembles de genre quelconque considérons, pour $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v \not\equiv 0$, la fonction $t \mapsto J(tv) =: f(t)$. En procédant comme dans la preuve de la proposition 2.6, on voit que pour $s > s_0 > 0$ on a $G(x,s) \geq G(x,s_0)(s/s_0)^\theta$ et par conséquent on conclut que pour $t > 0$ assez grand on a $f(t) < 0$ et pour $t > 0$ assez petit $f(t) > 0$. On en déduit qu'il existe $t := t(v) > 0$ tel que

$$f(t(v)) = \max_{t>0} f(t) = \max_{t>0} J(tv).$$

D'autre part on a $f'(t) = F(tv)/t$, donc si $f'(t_*) = 0$ on a $t_*v \in S$ et $f''(t_*) = \frac{1}{t_*}\langle F'(t_*v), v\rangle < 0$ (cf. proposition 2.6 **(ii)**). Finalement, puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on conclut qu'il existe un unique $t(v) > 0$ qui réalise le maximum de f ; on a donc $f'(t(v)) = 0$ et $f''(t(v)) < 0$. Par ailleurs comme $t(-v) = t(v)$, le théorème des fonctions implicites permet de conclure que $v \mapsto t(v)v$ est une fonction de classe C^1 et impaire de la sphère unité de $H_0^1(\Omega)$ dans S ; le théorème **2.**4.4 **(i)** permet alors de conclure que S contient des ensembles de tout genre k. En fait on peut montrer que même si $\lambda \geq \lambda_1$, S contient de tels ensembles (voir *Exercices*).

Exercices du chapitre 4

Exercice 1. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. On note $\|\cdot\|$ la norme de $L^2(\Omega)$ et on pose

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1} ,$$

et $F(v) := \langle E'(v), v\rangle$ pour $v \in H_0^1(\Omega)$. On considère enfin

$$S_0 := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \; ; \; v \neq 0, \quad F(v) = 0 \right\} ,$$

et une suite $(u_n)_n$ de S_0 telle que $E(u_n) \to \inf_{v\in S_0} E(v)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et que si $u_{n_j} \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible, alors $u_{n_j} \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, un réel $1 < p < \infty$, et $q > 1$ tel que $(N-p)q < Nq$. On pose

$$E(v) := \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q ,$$

et $F(v) := \langle E'(v), v\rangle$ pour $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On considère enfin

$$S_0 := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \; ; \; v \neq 0, \quad F(v) = 0 \right\} ,$$

et une suite $(u_n)_n$ de S_0 telle que $E(u_n) \to \inf_{v\in S_0} E(v)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et que si $u_{n_j} \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$-faible, alors $u_{n_j} \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ecrire l'équation satisfaite par u.

Exercice 3. Montrer la proposition 1.1.

Exercice 4. Soient $N \geq 2$, Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$. On pose

$$H_{0,\mathrm{div}}(\Omega) := \left\{ v \in \left(L^2(\Omega)\right)^N \; ; \; \nabla \cdot v = \mathrm{div}(v) = 0 \right\} ,$$

où $\nabla \cdot v$ est pris au sens de $H^{-1}(\Omega)$.

1) Montrer que $H_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\left(L^2(\Omega)\right)^N$. Etudier la densité des fonctions de $(C_c^\infty(\Omega))^N \cap H_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ dans $H_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$.

2) Montrer que pour tout $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^N$ il existe un unique $q \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta q = \mathrm{div}(f)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. En déduire qu'il existe un couple unique $(v, q) \in H_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$f = v + \nabla q\,.$$

3) Avec la décomposition précédente montrer que si une suite $(f_n)_n$ de $\left(L^2(\Omega)\right)^N$ converge vers f, alors la suite $(v_n, q_n)_n$ converge vers (v, q) dans $H_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

4) Généraliser cette décomposition au cas où $f \in (L^p(\Omega))^N$ et $1 < p < \infty$.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$. Montrer que si $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^N$ est donnée, il existe une unique fonction $u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N$ solution du problème de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega\,, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

(La fonction u représente la vitesse d'un fluide incompressible, et p la pression. L'incompressibilité est exprimée par la condition $\nabla \cdot u = 0$). On pourra étudier la fonction

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega v(x) \cdot f(x) dx,$$

sur l'espace $H = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \ ; \ \nabla \cdot v = 0 \right\}$. Dans cette approche le terme ∇p est trouvé comme un multiplicateur de Lagrange.

Exercice 6. En reprenant les notations de l'exemple 1.2, on considère une fonction $\rho \in L^q(\Omega)$, où $q \geq 1$ si $N = 1$, et $q > 2^*/(2^* - p - 1)$ si $N \geq 2$ (lorsque $N = 2$ cela signifie que $q > 1$). On suppose que $\rho > 0$ presque partout ; montrer que

$$J(v) := \int_\Omega a(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx - \lambda \int_\Omega |v(x)|^2 dx$$

atteint son minimum sur $S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \int_\Omega \rho(x)|v(x)|^{p+1} dx = 1 \right\}$, en un point $u_0 \in S$, et écrire l'équation satisfaite par u_0.

En supposant que Ω est un ouvert borné de classe C^1, étudier le même problème en remplaçant $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$.

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de classe C^1. Montrer que les solutions (u, λ) du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \not\equiv 0, \end{cases}$$

sont obtenues comme points critiques et valeurs critiques de $J(v) := \|\Delta v\|^2$ sur S la sphère $L^2(\Omega)$ de $H_0^2(\Omega)$, i.e.

$$S := \left\{ v \in H_0^2(\Omega) \; ; \; \|v\|^2 = 1 \right\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$ (c'est le problème des vibrations propres d'une plaque encastrée). Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valeurs propres et que $\lambda_n > 0$.

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de classe C^1. Montrer que les solutions (u, λ) du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = -\lambda \Delta u & \text{dans } \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \not\equiv 0, \end{cases}$$

sont obtenues comme points critiques et valeurs critiques de $J(v) := \|\Delta v\|^2$ sur la sphère $H_0^1(\Omega)$ de $H_0^2(\Omega)$, i.e. sur

$$S := \left\{ v \in H_0^2(\Omega) \; ; \; \|\nabla v\|^2 = 1 \right\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$ (c'est le problème du *flambage* d'une plaque encastrée). Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valeurs propres et que $\lambda_n > 0$.

Exercice 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de classe C^1. Montrer que les solutions (u, λ) du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \lambda u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \not\equiv 0, \end{cases}$$

sont obtenues comme points critiques et valeurs critiques de $J(v) := \|\nabla v\|^2$ sur la sphère $L^2(\partial\Omega)$ de $H^1(\Omega)$, i.e. sur

$$S := \left\{ v \in H^1(\Omega) \; ; \; \int_{\partial\Omega} |v(\sigma)|^2 d\sigma = 1 \right\}.$$

(C'est le problème de Steklov, correspondant aux vibrations propres d'une membrane élastique dont la masse est concentrée sur le bord). Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valeurs propres et que pour $n \geq 2$ on a $\lambda_n > \lambda_1 = 0$.

Exercice 10. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. On considère une fonction $c \in L^q(\Omega)$, où $q \geq 1$ si $N = 1$, et $q > 2^*/(2^* - p - 1)$ si $N \geq 2$ (lorsque $N = 2$ cela signifie que $q > 1$), et telle que $c > 0$ presque partout sur Ω et la fonction

$$J(v) := \int_\Omega a(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)dx + \lambda\int_\Omega \rho(x)|v(x)|^2dx,$$

où $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1\le i,j\le N}$ est une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément coercive sur Ω.

1) Montrer que si $\rho \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > N/2$, alors J satisfait la condition de Palais-Smale sur $S := \left\{v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \int_\Omega c(x)|v(x)|^{p+1}dx = 1\right\}$.

2) Dans ces conditions, en déduire l'existence d'une infinité de solutions pour l'équation

$$\begin{cases} -\text{div}\ (a(\cdot)\nabla u) + \rho u = c(\cdot)|u|^{p-1}u & \text{dans}\ \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur}\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercice 11. Avec les notations de la proposition 2.6, on suppose que la fonction g satisfait les hypothèses de cette proposition mais que $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque. Montrer que si une suite $(u_n, \mu_n) \in S \times \mathbb{R}$ est telle que

$$J(u_n) \to c > 0, \qquad J'(u_n) - \mu_n F'(u_n) \to 0\ \ \text{dans}\ \ H^{-1}(\Omega),$$

alors $(u_n, \mu_n)_n$ contient une sous-suite convergente.

Exercice 12. Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et, pour $1 \le j \le m$, des fonctions $F_j \in C^{1,1}_{\text{loc}}(X, \mathbb{R})$. On pose

$$S := \{v \in X\ ;\ F_j(v) = 0\ \ \text{pour}\ \ 1 \le j \le m\}.$$

1) On suppose que pour tout $v \in S$ on a

$$\dim \mathbb{R}\,\{F_1'(v), \ldots, F_m'(v)\} = m.$$

Montrer l'existence d'un champ de p.g. tangent pour J sur S.

2) Lorsque J satisfait la condition de Palais-Smale sur S établir le lemme de déformation.

Exercice 13. Montrer que si $(B_n)_n$ est une suite d'opérateurs compacts et auto-adjoints convergeant vers B, alors les valeurs propres $\lambda_k^{(n)}$ de B_n convergent vers λ_k, valeur propre de B.

En fait de manière générale, le spectre d'un opérateur dépend continûment de l'opérateur, sans hypothèse de symétrie. Par exemple, on va montrer que les valeurs propres d'une matrice A dépendent continûment de ses coefficients ou, ce qui revient au même, que les racines d'un polynôme dépendent continûment de ses coefficients. En effet soit dans $\mathbb{C}^n$ la relation d'équivalence définie par : $x\ \mathscr{R}\ y$ ssi il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $(x_i)_i = (y_{\sigma(i)})_i$. On pose $E := \mathbb{C}^n/\mathscr{R}$ et on le munit de la distance

$$d(x, y) := \inf\left\{\max_{1\le i\le n}(|x_i - y_{\sigma(i)}|)\ ;\ \sigma\ \text{permutation de}\ \ \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

On désigne par F l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1 ; F est muni de la topologie induite par $\mathbb{C}^n$. Soit enfin $\varphi : E \longrightarrow F$ définie par

$$\varphi(a) := \prod_{i=1}^{n}(X - a_i).$$

1) Montrer que φ est bijective et continue ainsi que son inverse. En déduire le résultat annoncé.

2) En calculant les vecteurs propres normalisés de la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 + k^{-1}\cos(2k) & -k^{-1}\sin(2k) \\ -k^{-1}\sin(2k) & 1 - k^{-1}\cos(2k) \end{pmatrix},$$

vérifier qu'en général, on ne peut rien dire de la dépendance des vecteurs propres.

Exercice 14. Nous avons vu que la première fonction propre du laplacien, sur un ouvert borné et connexe avec condition de Dirichlet, est positive. Mais on peut donner des exemples d'opérateurs *ressemblant* au laplacien avec condition de Dirichlet qui ne possèdent pas cette propriété. Soit $Au := -\Delta u$ avec le domaine $D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ Au \in L^2(\Omega)\}$, où Ω est un ouvert borné et connexe. On désignera par $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres de A.

1) On pose $B := A + \theta A^{-1}$ pour $\theta > 0$, avec $D(B) := D(A)$. Montrer que B est auto-adjoint et ses valeurs propres sont $\mu_k := \lambda_k + \theta\lambda_k^{-1}$.

2) Montrer que si $j \geq 1$ est fixé, on peut choisir $\theta > 0$ pour que, pour $k \leq j-1$, les fonctions propres de B correspondant à la valeur propre μ_k ne soient pas de signe constant.

Exercice 15. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et connexe et $\rho \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que $\rho^+ \not\equiv 0$, $\rho^- \not\equiv 0$ et $|\rho| > 0$ p.p. sur Ω. On s'intéresse au problème aux valeurs propres du problème de Dirichlet :

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \qquad -\Delta\varphi = \lambda\rho\varphi\,. \tag{1}$$

1) Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de valeurs propres pour le problème (1), que zéro n'est pas valeur propre et que $|\lambda_j| \to +\infty$ lorsque $j \to \infty$.

2) Vérifier que si $\varphi \neq 0$ est une fonction propre correspondant à λ_j, alors on a

$$\lambda_j \int_\Omega \rho(x)|\varphi(x)|^2 dx > 0\,.$$

Dans la suite on pose $S_\pm := \{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \int_\Omega \rho(x)|u(x)|^2 dx = \pm 1\}$, puis pour $k \geq 1$ en notant S^{k-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^k$:

$$\mathscr{B}_{k,\pm} := \{h(S^{k-1})\ ;\ h \in C(S^{k-1}; S_\pm),\ \text{ impaire}\}\ .$$

3) Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $\mathscr{B}_{k,\pm} \neq \varnothing$.

4) Montrer que $J(u) := \|\nabla u\|^2$ vérifie la condition de Palais-Smale sur S_+ et sur S_-.

5) Montrer que les nombres

$$c_{k,\pm} := \inf_{B\in\mathscr{B}_{k,\pm}} \max_{u\in B} J(u)\,,$$

sont valeurs critiques de J sur $S_\pm$, que $c_{k,\pm} > 0$ et que $c_{k,\pm} \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$.

6) Vérifier que $c_{k,+}$ et $-c_{k,-}$ sont valeurs propres de (1), et que toutes les valeurs propres λ_j peuvent être obtenues de cette manière.

7) Montrer que l'étude précédente est valable lorsque $\rho \in L^q(\Omega)$ avec $q > \max(1, N/2)$.

Exercice 16. Sur l'intervalle $]0,1[$ on considère la fonction ρ définie par $\rho(x) := 1$ si $0 < x < 1/2$ et $\rho(x) := -1$ si $1/2 < x < 1$. Montrer que les valeurs propres du problème

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}\,, \qquad -\varphi'' = \lambda\rho\varphi\,,$$

sont données par $\lambda_k = \pm 4\omega_k^2$ où les $\omega_k > 0$ sont solutions de $\mathrm{tg}(\omega_k) + \mathrm{th}(\omega_k) = 0$. Déterminer également les fonctions propres et leur régularité.

5 Problèmes sans symétrie

1. La situation du problème

Si g est une fonction monotone et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons vu que l'équation

$$-\Delta u + g(u) = f, \tag{1.1}$$

admettait une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$, pourvu que, par exemple, Ω soit borné et que $f \in L^2(\Omega)$. De manière plus générale, pour une classe assez large d'opérateurs *monotones* A, des équations du type $Au = f$ peuvent être résolues, soit par une méthode variationnelle lorsque A est la dérivée d'une fonctionnelle convexe, soit en utilisant la théorie générale des opérateurs maximaux monotones (voir par exemple H. Brezis [27], F.E. Browder [38], I. Ekeland & R. Temam [60], R.T. Rockafellar [143], J.L. Lions [101]). Par contre dès que la fonction g dans l'équation ci-dessus n'est pas monotone croissante, on peut perdre l'unicité de la solution et, dans la plupart des cas, on n'est pas en mesure d'en montrer l'existence.

Par exemple si $g(s) := s^3 - \lambda s$, suivant la position de λ vis à vis du spectre du laplacien avec condition de Dirichlet, l'équation (1.1) peut avoir une solution unique ou plusieurs solutions dans $H_0^1(\Omega)$. En revanche, si par exemple Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, les techniques que nous avons vues ne permettent pas de décider si l'équation (1.1) admet une (ou plusieurs) solution lorsque $g(s) := \lambda s - s^3$ et f est une fonction de $L^2(\Omega)$ ou même $C_c^\infty(\Omega)$. Cependant, nous avons vu que si $f \equiv 0$ on pouvait montrer l'existence d'une infinité de solutions $(u_j)_{j\geq 1}$, dont la norme (ou l'énergie) tend vers l'infini ; de même, un argument très simple utilisant le théorème des fonctions implicites permet de montrer que si f est *petite* au sens d'une norme adéquate, l'équation en question admet au moins une solution (voir *Exercices*). Ce résultat peut être interprété comme un résultat de *stabilité* de la solution nulle de l'équation $-\Delta u = u^3 - \lambda u$ et on pourrait s'attendre à avoir un résultat analogue pour les autres solutions u_j de cette équation. A notre connaissance, ce problème demeure encore non résolu, malgré les recherches actives de ces dernières années.

Pour donner un exemple simple, si on considère la fonction

$$F_*(t) := 2a^2t^2 - t^4$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour $a > 0$ donné, on sait que F_* admet trois points critiques $-a, 0$ et a. Si maintenant, pour $b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $F(t) := F_*(t) - bt$, on voit que l'équation $f(t) := a^2t - t^3 - b = 0$ admet trois solutions si b est *assez petit*, plus précisément si $27b^2 < 4a^6$. Cela signifie que, dans ces conditions, F admet trois points critiques qui sont en quelque sorte les *perturbés* de ceux de F_*. Comme l'opérateur $-\Delta$ a des valeurs propres qui tendent vers l'infini, on peut s'attendre à ce que l'équation $-\Delta u = u^3 + f$ admette au moins une solution pour tout $f \in L^2(\Omega)$ (par exemple lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$).

Dans ce chapitre nous nous proposons de donner un résultat abstrait qui est d'une certaine manière une généralisation du théorème **4.**5.3 aux fonctionnelles J qui ne sont pas paires. Cette généralisation peut être interprétée comme un résultat de stabilité des valeurs critiques d'une fonctionnelle paire. Nous donnerons ensuite deux exemples d'application de ce résultat.

Nous devons rappeler encore une fois qu'il n'existe pas, pour le moment, une étude exhaustive des équations du type

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $g(0) = 0$ et $g(s)$ se comporte à l'infini comme $|s|^{p-1}s$, mais ne possède aucune propriété de symétrie. Par exemple si $f \equiv 0$ et

$$g(s) := a(s^+)^{p_1} - b(s^-)^{p_2},$$

avec $p_i > 1$ et $(N-2)p_i < N+2$ pour $i = 1, 2$ et $a, b > 0$, on ne sait pas si l'équation (1.2) admet une infinité de solutions lorsque $p_1 \neq p_2$, ni même lorsque $p_1 = p_2$ et $a \neq b$.

2. Perturbations de fonctionnelles paires

Soient X un espace de Banach de *dimension infinie*, $F \in C^{1,1}_{\text{loc}}(X, \mathbb{R})$ une fonction *paire* telle que :

$$\forall v \in X \quad \text{vérifiant} \quad F(v) = 0, \quad \text{on a} \quad F'(v) \neq 0. \tag{2.1}$$

Lorsque $J_0 \in C^1(X, \mathbb{R})$ est une fonction *paire*, nous avons vu que si $s(X)$ désigne l'ensemble des parties fermées de X qui ne contiennent pas l'origine et sont symétriques (par rapport à l'origine), en notant

$$\begin{aligned} M &:= \{v \in X\ ;\ F(v) = 0\}\,, \\ \mathscr{B}_k &:= \{A \subset M\ ;\ A \in s(X)\ \text{ et }\ \gamma(A) \geq k\}\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

alors le nombre

$$c_k := \inf_{A \in \mathscr{B}_k} \sup_{v \in A} J_0(v)$$

est une valeur critique de J_0 sur M pourvu que J_0 satisfasse la condition de Palais-Smale sur M, que $\mathscr{B}_k \neq \varnothing$ et que $c_k \in \mathbb{R}$. On a vu aussi dans les *Exercices* du chapitre 4 que l'on pouvait définir une autre suite de valeurs critiques $\widetilde{c}_k$ par

$$\widetilde{c}_k := \inf_{A \in \widetilde{\mathscr{B}}_k} \sup_{v \in A} J_0(v) \ ,$$

où la famille $\widetilde{\mathscr{B}}_k$ est définie par :

$$\widetilde{\mathscr{B}}_k := \left\{ h(S^{k-1}) \ ; \ h \ : S^{k-1} \longrightarrow M \ \text{ continue et impaire} \right\} \ .$$

De manière claire on a $c_k \leq \widetilde{c}_k$ (plus précisément chaque fois que $\widetilde{\mathscr{B}}_k \neq \varnothing$ et $\widetilde{c}_k \in \mathbb{R}$, alors $\widetilde{c}_k$ est valeur critique de J_0 sur M). On peut même prendre, dans la définition des ensembles $\widetilde{\mathscr{B}}_k$, les fonctions h continues, impaires et injectives et obtenir une valeur critique de J_0. On dit souvent que c_k ou $\widetilde{c}_k$ sont des valeurs critiques de J_0 correspondant aux ensembles d'indice (ou de genre) k.

Il est intéressant, pour la compréhension de ce qui suit, de remarquer également que l'on peut *construire* des valeurs critiques de J_0 en considérant des images d'*hémisphères* S^k_+ en procédant comme suit : tout d'abord on fixe une famille libre $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ d'éléments de S, la sphère unité de X. On notera (comme d'habitude) S^k la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{k+1}$, qui sera identifié à l'espace $\mathbb{R}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}\}$, et on considérera S^{k-1} comme l'*équateur* de S^k. Pour $k \geq 1$ on considère l'*hémisphère nord* de S^k, c'est à dire :

$$S^k_+ := \left\{ u \in S^k \ ; \ u = \sum_{i=1}^{k+1} u_i \varphi_i \quad , u_i \in \mathbb{R}, \text{ et } \ u_{k+1} \geq 0 \right\}, \tag{2.3}$$

puis on pose :

$$\mathscr{A}_k := \left\{ h(S^{k-1}) \ ; \ h : S^{k-1} \to M, \text{ continue, impaire} \right\}, \tag{2.4}$$

$$\mathscr{B}_k := \left\{ h(S^k_+) \ ; \ h : S^k_+ \to M, \text{ continue, } h_{|S^{k-1}} \text{ impaire} \right\}. \tag{2.5}$$

Alors J_0 étant comme ci-dessus une fonction paire et satisfaisant la condition de Palais-Smale sur M, on peut facilement vérifier que les nombres

$$a^0_k := \inf_{A \in \mathscr{A}_k} \max_{v \in A} J_0(v), \qquad b^0_k := \inf_{B \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in B} J_0(v)$$

sont des valeurs critiques de J_0, pourvu que les ensembles $\mathscr{A}_k, \mathscr{B}_k$ soient non vides et que a^0_k, b^0_k soient dans $\mathbb{R}$. En réalité, sous des hypothèses adéquates que nous préciserons plus loin, on peut voir qu'un élément quelconque $A := h(S^{k-1})$ de $\mathscr{A}_k$ est contenu dans un élément $B \in \mathscr{B}_k$, ce qui implique que de façon générale pour une fonction J de M dans $\mathbb{R}$ on a

$$a_k := \inf_{A \in \mathscr{A}_k} \max_{v \in A} J(v) \leq \inf_{B \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in B} J(v) =: b_k.$$

Dans le cas particulier que nous avons ici, i.e. J_0 paire, si h impaire et continue de S^k_+ dans M est donnée, en posant

$$\widetilde{h}(u) := \begin{cases} h(u) & \text{si } u \in S^k_+ \\ -h(-u) & \text{si } -u \in S^k_+, \end{cases}$$

on voit tout de suite que $\widetilde{h}$ est une fonction continue et impaire de S^k dans M. En posant $B := h(S^k_+)$ et $\widetilde{B} := \widetilde{h}(S^k)$, on a $B \in \mathscr{B}_k$ et $\widetilde{B} \in \mathscr{A}_{k+1}$. Or

$$\max_{v\in B} J_0(v) = \max_{v\in \widetilde{B}} J_0(v),$$

et par conséquent on peut conclure, lorsque $\mathscr{B}_k \neq \varnothing$, que

$$a^0_k \leq a^0_{k+1} = b^0_k.$$

Nous allons montrer *grosso modo* que si $a^0_k < a^0_{k+1}$, on peut perturber *"légèrement"* la fonctionnelle paire J_0 en une fonctionnelle quelconque J (tout de même de classe C^1 et vérifiant la condition de Palais-Smale), de telle sorte que J possède encore une valeur critique correspondant à l'indice k.

Pour simplifier l'exposé qui suit, nous allons supposer que M est *essentiellement* une sphère en ce sens que tout point de X autre que l'origine peut être ramené sur M par une homothétie. Plus précisément

$$\forall v \in X \setminus \{0\}\,,\ \exists t(v) > 0 \text{ unique tel que, } F(t(v)v) = 0. \tag{2.6}$$

Par exemple dans le cas où $X := H^1_0(\Omega)$, avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, pour $q \geq 2$ et $(N-2)q \leq 2N$ on pourra prendre $F(v) := \|v\|^q_q - 1$.

En réalité, comme on peut le voir aisément lors de la démonstration du théorème qui suit, on peut alléger une telle condition, mais cela n'aiderait pas à éclaircir la démarche que nous allons entreprendre ; de plus dans les exemples que nous traiterons plus loin ou que l'on rencontre dans la pratique, une telle condition est satisfaite. On peut alors énoncer le résultat suivant :

2.1 Lemme. *Soient X un espace de Banach de dimension infinie et F une fonction paire de X dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (2.6). On suppose de plus que $v \mapsto t(v)$ est continue et paire. Alors les familles $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ définies par (2.4) et (2.5) sont non vides et tout élément A de $\mathscr{A}_k$ est contenu dans un élément B de $\mathscr{B}_k$.*

Démonstration. Tout d'abord notons que M est de genre infini, car il contient des ensembles de genre quelconque : en effet, si pour $z \in S^{k-1}$ on pose $g(z) := t(z)z$, alors $g(S^{k-1})$ est de genre au moins égal à k et contenu dans M. En particulier pour tout $k \geq 1$, les familles $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ sont non vides. Soit $A \in \mathscr{A}_k$ tel que $A = h_0(S^{k-1})$, où $h_0 \in C(S^{k-1}, M)$ est une fonction impaire. Comme A est compact, donc de genre fini, et que M ne l'est pas, on peut trouver $v_0 \in M \setminus A$ tel que pour tout $u \in A$ et $-1 \leq \theta \leq 1$ on ait $u + \theta v_0 \neq 0$ (sinon M serait contenu dans $\{\lambda u\ ;\ u \in A,\ |\lambda| \geq 1\}$ qui est de genre fini). En écrivant l'élément générique de S^k_+ sous la forme $z := z_1 + \theta\varphi_{k+1}$ avec $z_1 \in S^{k-1}$ (considéré comme l'équateur de S^k_+) et $0 \leq \theta \leq 1$, soit

$$h(z) := t\left(h_0(z_1) + \theta v_0\right)\left[h_0(z_1) + \theta v_0\right].$$

Il est clair que h est continue de S^k_+ dans M et que sa restriction à S^{k-1} est précisément h_0, donc impaire, et ainsi $B := h(S^k_+) \in \mathscr{B}_k$ et $A \subset B$ (nous attirons l'attention sur le fait que c'est le seul point où nous avons besoin de l'hypothèse (2.6)). □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat concernant l'existence de valeurs critiques pour une fonction J qui n'est pas nécessairement paire.

2.2 Théorème. *Soient X un espace de Banach de dimension infinie, $F \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R})$ une fonction paire satisfaisant les conditions (2.1) et (2.6), la contrainte M définie par (2.2) et (pour un entier $k \geq 1$ fixé) les ensembles $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ définis par (2.4) et (2.5). On suppose de plus que $0 \notin M$, et que la fonction $v \mapsto t(v)$ donnée par (2.6) est continue et paire.*

Soient $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ une fonction satisfaisant la condition de Palais-Smale sur M et

$$a_k := \inf_{A\in\mathscr{A}_k} \max_{v\in A} J(v), \qquad b_k := \inf_{B\in\mathscr{B}_k} \max_{v\in B} J(v). \tag{2.7}$$

On a $a_k \leq b_k$ et, si $a_k \in \mathbb{R}$ et $a_k < b_k$, alors J admet un point critique $c_k \geq b_k$ correspondant à l'indice k. Plus précisément, soit $2\varepsilon_* := b_k - a_k$; si $A_0 \in \mathscr{A}_k$ vérifie $\max_{v\in A_0} J(v) \leq a_k + \varepsilon_*$, alors, en posant

$$\mathscr{C}_k := \left\{ h(S^k_+) \,;\, h \in C(S^k_+, M),\ h_{|S^{k-1}} \text{ impaire et } h(S^{k-1}) = A_0 \right\},$$
$$c_k := \inf_{C\in\mathscr{C}_k} \max_{v\in C} J(v)\,,$$

c_k est valeur critique de J sur M et $c_k \geq b_k$.

Démonstration. Sous les hypothèses du théorème, le lemme 2.1 implique que tout élément A de $\mathscr{A}_k$ est contenu dans un élément de $\mathscr{B}_k$, et réciproquement tout élément B de $\mathscr{B}_k$ contient un élément de $\mathscr{A}_k$; par conséquent on a $a_k \leq b_k$. Supposons que $a_k \in \mathbb{R}$, ce qui implique en particulier que $b_k \in \mathbb{R}$, et soient $2\varepsilon_* := b_k - a_k > 0$ et $A_0 \in \mathscr{A}_k$ tel que

$$a_k \leq \max_{v\in A_0} J(v) \leq a_k + \varepsilon_* = b_k - \varepsilon_* < b_k.$$

Notons en premier lieu que la famille $\mathscr{C}_k$ définie dans le théorème est non vide et contenue dans $\mathscr{B}_k$; en effet il est clair que $\mathscr{C}_k \subset \mathscr{B}_k$ et que si $A_0 = h_0(S^{k-1})$, en procédant comme dans la démonstration du lemme 2.1, on peut prolonger h_0 à S^k_+ en posant, pour $z_1 \in S^{k-1}$ et $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\widetilde{h}_0(z_1 + \theta\varphi_{k+1}) := t\left(h_0(z_1) + \theta v_0\right)\left[h_0(z_1) + \theta v_0\right],$$

pour un $v_0 \in M \setminus A_0$ fixé de telle sorte que $u + \theta v_0 \neq 0$ pour $u \in A_0$ et $0 \leq \theta \leq 1$. Dans ces conditions on voit que $\widetilde{h}_0(S^k_+) \in \mathscr{C}_k$.

On a donc $c_k \geq b_k > a_k$, et nous allons montrer que c_k est valeur critique de J sur M. Sinon, d'après le lemme de déformation **4.**4.1, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ avec $\varepsilon_0 < \varepsilon_*$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on puisse construire un flot $\eta \in C(\mathbb{R}\times M, M)$ vérifiant $\eta(0,u) = u$ et

$$\eta(s,u) = u, \quad \text{pour tout } (s,u) \in \mathbb{R} \times [c_k - \varepsilon_0 \leq J \leq c_k + \varepsilon_0]^c,$$
$$\eta(1,u) \in [J \leq c_k - \varepsilon], \quad \text{pour tout } u \in [J \leq c_k + \varepsilon].$$

On peut alors prendre $C := h(S^k_+) \in \mathscr{C}_k$ tel que $\max_{v\in C} J(v) \leq c_k + \varepsilon$. Soit maintenant

$$\widetilde{h}(z) := \eta(1, h(z)), \qquad \widetilde{C} := \widetilde{h}(S^k_+).$$

Si $z \in S^{k-1}$, considéré comme l'équateur de S^k_+, on sait que $h(z) \in A_0$ et par conséquent

$$J(h(z)) \leq a_k + \varepsilon_* = b_k - \varepsilon_* < b_k - \varepsilon_0 \leq c_k - \varepsilon_0.$$

On en conclut que si $z \in S^{k-1}$, on a $\eta(s, h(z)) = h(z)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et en particulier que $\widetilde{h} = h$ sur S^{k-1}. Cela prouve que $\widetilde{C} \in \mathscr{C}_k$; mais on aurait alors, d'après la propriété du flot de *déformer* les ensembles $[J \leq c_k + \varepsilon]$ en $[J \leq c_k - \varepsilon]$,

$$c_k \leq \max_{v\in\widetilde{C}} J(v) \leq c_k - \varepsilon,$$

ce qui est impossible. Par conséquent c_k est valeur critique de J sur M et le théorème est prouvé. □

Dans la pratique, pour utiliser ce théorème, on procède de la manière suivante : on considère que J est la perturbation d'une fonction paire J_0 (par exemple $J_0(v) := (J(v) + J(-v))/2$), et en notant $a^0_k, b^0_k = a^0_{k+1}$ les nombres définis dans le théorème pour la fonction J_0, on essaie d'estimer d'une part les différences $a_k - a^0_k$ et $b_k - b^0_k = b_k - a^0_{k+1}$, et d'autre part la différence $a^0_{k+1} - a^0_k$, pour voir si pour certains entiers k on a $b_k > a_k$. Dans la suite nous allons donner deux exemples d'application de ce théorème.

3. Comportement des valeurs critiques

Dans ce paragraphe nous regroupons quelques résultats auxiliaires concernant la croissance des valeurs propres du laplacien, ainsi que celle des valeurs critiques de la fonction $J_*(u) := \|\nabla u\|^2$ sur l'ensemble

$$\left\{u \in H^1_0(\Omega) \ ; \ \|u\|_{p+1} = 1\right\}.$$

Ces résultats sont utiles dans d'autres situations et peuvent être utilisés pour établir des estimations analogues pour d'autres opérateurs que le laplacien avec condition de Dirichlet ; dans les *Exercices* on pourra en trouver quelques exemples.

Nous commencerons par le résultat suivant concernant les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet (voir R. Courant & D. Hilbert [50]).

3.1 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet sur Ω, i.e.*

$$\lambda_k := \lambda_k(\Omega) := \inf_{A\in\mathscr{A}_k} \max_{v\in A} \|\nabla v\|^2,$$
$$\mathscr{A}_k := \mathscr{A}_k(\Omega) := \left\{h(S^{k-1})\,;h\in C(S^{k-1},S)\ \textit{impaire}\right\},$$

où $S := \left\{u\in H_0^1(\Omega)\,;\ \|u\|^2=1\right\}$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$. Il existe alors deux constantes $c_1,c_2>0$ telles que pour tout $k\geq 1$ on ait

$$c_1 k^{2/N} \leq \lambda_k \leq c_2 k^{2/N}. \tag{3.1}$$

Démonstration. Rappelons que la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ définie ci-dessus est précisément la suite des valeurs propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ (voir exemple **4**.5.7). Soient $\Omega_1\subset\Omega_2$ deux ouverts ; si $u\in H_0^1(\Omega_1)$, nous savons qu'en posant $\widetilde{u}(x)=u(x)$ pour $x\in\Omega_1$ et $\widetilde{u}(x)=0$ pour $x\in\Omega_2\setminus\Omega_1$, on a $\widetilde{u}\in H_0^1(\Omega_2)$ (voir proposition **1**.8.2). Par conséquent, $\mathscr{A}_k(\Omega_1)\subset\mathscr{A}_k(\Omega_2)$ et $\lambda_k(\Omega_2)\leq\lambda_k(\Omega_1)$ (en fait si $\Omega_1\neq\Omega_2$, on a une inégalité stricte ; cf. *Exercices*). En particulier on conclut que, si ω_1 et ω_2 sont deux pavés tels que $\omega_1\subset\Omega\subset\omega_2$,

$$\lambda_k(\omega_2)\leq\lambda_k(\Omega)\leq\lambda_k(\omega_1).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que le résultat du lemme est vrai si Ω est un pavé. Or, si $z\in\mathbb{R}^N$ et $t>0$, on a

$$\lambda_k(z+\Omega)=\lambda_k(\Omega),\qquad \lambda_k(t\Omega)=t^{-2}\lambda_k(\Omega),$$

ce qui permet finalement de se ramener au cas où, pour des T_i tels que $0<T_i\leq 1$, le pavé est donné par

$$\Omega=\prod_{i=1}^N]0,T_i[.$$

Or dans ce cas, un calcul élémentaire montre que les valeurs propres et fonctions propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ sont données par

$$\psi_\alpha(x) := \prod_{i=1}^N \sin\left(\alpha_i\pi x_i/T_i\right),\qquad \mu_\alpha := \pi^2\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^2}{T_i^2}\,,$$

où $\alpha\in\mathbb{N}^N$ est un multi-indice tel que $|\alpha|\geq 1$, et on a $-\Delta\psi_\alpha=\mu_\alpha\psi_\alpha$. On peut montrer facilement que pour des constantes positives γ_1,γ_2 dépendant uniquement des T_i, on a pour tout $R>0$

$$\gamma_1 R^{N/2}\leq \operatorname{card}\left\{\alpha\in\mathbb{N}^N\,;\ \mu_\alpha\leq R\right\}\leq\gamma_2 R^{N/2},$$

ce qui permet de conclure que si la suite des $(\mu_\alpha)_\alpha$ est rangée dans un ordre croissant et appelée $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, on a

$$\gamma_1 R^{N/2}\leq \operatorname{card}\left\{j\geq 1\,;\ \lambda_j\leq R\right\}\leq\gamma_2 R^{N/2},$$

et finalement, en prenant $R := \lambda_k$ on voit que $\gamma_1 \lambda_k^{N/2} \leq k \leq \gamma_2 \lambda_k^{N/2}$, ce qui signifie que $c_1 k^{2/N} \leq \lambda_k \leq c_2 k^{2/N}$ pour des constantes $c_1, c_2 > 0$ dépendant de Ω. □

3.2 Remarque. En fait on peut montrer que

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2/N} \lambda_k(\Omega)$$

existe (et elle est positive) pour tout ouvert Ω (il s'agit d'un théorème de H. Weyl ; voir par exemple le livre de R. Courant & D. Hilbert [50], et M. Reed & B. Simon [139, § XIII.15]). Plus précisément en désignant par λ_k les valeurs propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\lim_{R\to\infty} R^{-N/2} \mathrm{card}\,\{j \geq 1\ ;\ \lambda_j \leq R\} = (2\pi)^{-N} \mathrm{mes}([|x| < 1])\,\mathrm{mes}(\Omega),$$

pour un ouvert assez régulier Ω. □

Nous allons dans un deuxième temps estimer les valeurs critiques de

$$J_*(v) := \|\nabla v\|^2, \quad \text{sur} \quad M := \left\{v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \|v\|_{p+1} = 1\right\}. \tag{3.2}$$

On désignera par $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ et $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres et fonctions propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$, et on supposera que $\|\varphi_k\| = 1$.

3.3 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p \leq N+2$ et J_*, M définis par (3.2). Les ensembles $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ étant définis par (2.4) et (2.5), on pose*

$$a_k^* := \inf_{A\in\mathscr{A}_k} \max_{v\in A} J_*(v), \qquad b_k^* := \inf_{B\in\mathscr{B}_k} \max_{v\in B} J_*(v).$$

Alors on a $b_k^* = a_{k+1}^*$ et il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de p et Ω telle que pour tout $k \geq 1$ on ait

$$a_k^* \geq c_0 k^\tau \quad \text{avec} \quad \tau := \frac{2}{N} - \frac{p-1}{p+1}\,.$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que $b_k^* = a_{k+1}^*$. Si $A \in \mathscr{A}_k$ alors, en notant H_{k-1} le sous-espace engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ dans $L^2(\Omega)$, on a $A \cap H_{k-1}^\perp \neq \varnothing$. En effet dans le cas contraire, en désignant par P_{k-1} la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur H_{k-1}, on aurait $P_{k-1}(A) \subset H_{k-1} \setminus \{0\}$, et A serait de genre inférieur ou égal à $k-1$ (voir la propriété (i) du théorème **2.**4.4 ; ici P_{k-1} est une application continue et impaire). Or A est l'image continue et impaire de S^{k-1}, qui est de genre k, et par conséquent le genre de A est au moins égal à k. On voit donc que $A \cap H_{k-1}^\perp \neq \varnothing$.

Soient donc $A \in \mathscr{A}_k$ et $v_0 \in A \cap H_{k-1}^\perp$. On sait que $\lambda_k \|v_0\|^2 \leq \|\nabla v_0\|^2$, et par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on a

$$\|v_0\|_{p+1} \leq C\,\|v_0\|^{1-\theta} \|\nabla v_0\|^\theta, \quad \text{où} \quad \frac{1}{p+1} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{2}\,.$$

Puisque $\|v_0\|_{p+1} = 1$ et $\|v_0\| \leq \lambda_k^{-1/2}\|\nabla v_0\|$, on conclut finalement que $\lambda_k^{1-\theta} \leq C\|\nabla v_0\|^2$. Comme on a $\lambda_k \geq c_1 k^{2/N}$ et que $\theta = \frac{N}{2} - \frac{N}{p+1}$, le résultat du lemme est prouvé. □

L'estimation obtenue ici est loin d'être optimale. En effet lorsque $N \geq 3$ et $p = (N+2)/(N-2)$, on a $\tau = 0$ et l'estimation précédente indique seulement que $a_k^* \geq c_0$; nous avons donné ce résultat pour la simplicité de sa démonstration et aussi parce que les premières études de l'équation

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

par M. Struwe [155], A. Bahri [10] et A.Bahri & H. Berestycki [11] utilisaient cette estimation pour montrer que (3.3) admet une infinité de solutions lorsque p est assez voisin de 1. En réalité, comme l'ont prouvé plus tard A. Bahri & P.L. Lions [15] on peut obtenir une meilleure estimation sur la croissance de a_k^*.

Rappelons que si $V \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est telle que $V^- \in L^{N/2}(\Omega)$, on peut définir un opérateur auto-adjoint L par

$$Lu := -\Delta u + Vu$$

sur le domaine $D(L) := \{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega),\ Lu \in L^2(\Omega)\}$ (voir par exemple H. Brezis & T. Kato [32]). On a alors le résultat suivant (c'est l'inégalité de Rosenbljum-Lieb-Cwickel).

3.4 Théorème. *Soient $N \geq 3$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $V \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que $V^- \in L^{N/2}(\Omega)$. On désigne par $Lu := -\Delta u + Vu$ l'opérateur auto-adjoint défini sur $L^2(\Omega)$ avec $D(L)$ défini ci-dessus, et par $n(V)$ le nombre de valeurs propres négatives de L. Alors*

$$n(V) \leq C(N) \int_\Omega |V^-(x)|^{N/2} dx,$$

où $C(N)$ est une constante dépendant de N. Le même résultat est vrai lorsque $N = 2$ si l'exposant $N/2$ est remplacé par $1 + \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est dû à G.V. Rosenbljum [144], E.H. Lieb [95] et M. Cwickel [51], lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$; on pourra consulter M. Reed & B. Simon [139, theorem XIII.12] pour la démonstration de ce théorème. Cependant, comme on peut le voir dans les *Exercices*, on peut facilement en déduire le résultat que nous avons énoncé. On notera en particulier que l'on peut déduire de cette inégalité une partie de l'inégalité (3.1) (voir *Exercices*).

Des estimations sur les *moments* des valeurs propres négatives de L, c'est-à-dire sur

$$\sum_{\lambda_k < 0} |\lambda_k|^m,$$

où $m > 0$ et λ_k est valeur propre de L, ont été établies par E.H. Lieb & W. Thirring et nous renvoyons le lecteur intéressé à [99].

Si $u_k \in H_0^1(\Omega)$ est point critique de J_* sur M correspondant à la valeur a_k^* (et c'est le cas lorsque $p > 1$ et $(N-2)p < N+2$), on a

$$-\Delta u_k = a_k^* |u_k|^{p-1} u_k,$$

et en étudiant le nombre de valeurs propres négatives ou nulles de l'opérateur L défini par

$$Lv := -\Delta v - p a_k^* |u_k|^{p-1} v,$$

sur $H_0^1(\Omega)$, on peut alors montrer (voir A. Bahri & P.L. Lions [14, 15]) qu'il existe un point critique u_k associé à a_k^* tel que l'opérateur L (qui n'est autre que la dérivée seconde de J_* en u_k) possède k valeurs propres négatives ou nulles. Maintenant, en utilisant l'inégalité de Rosenbljum-Lieb-Cwickel, on obtient le résultat suivant :

3.5 Lemme. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$, $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p < N+2$ et J_*, M définis par (3.2). Les ensembles $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ étant définis par (2.4) et (2.5), on pose*

$$a_k^* := \inf_{A \in \mathscr{A}_k} \max_{v \in A} J_*(v), \qquad b_k^* := \inf_{B \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in B} J_*(v).$$

Alors on a $b_k^* = a_{k+1}^*$ et il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de p et Ω telle que pour tout $k \geq 1$ on ait

$$a_k^* \geq c_0 k^\tau, \qquad \text{avec } \tau := \frac{2}{N} \text{ si } N \geq 3,$$

et où on peut prendre $\tau = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire, lorsque $N = 2$.

3.6 Remarque. En utilisant un théorème de prolongement, on peut montrer que si Ω est un ouvert connexe de classe C^1, les valeurs propres du problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_k = \lambda_k^{\mathrm{N}} \varphi_k & \text{dans } \Omega\,, \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

vérifient également une estimation du type

$$c_1 k^{2/N} \leq \lambda_k^{\mathrm{N}} \leq c_2 k^{2/N},$$

pour des constantes $c_1, c_2 > 0$ dépendant de Ω et pour tout $k \geq 2$. De manière générale, en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres et des théorèmes de prolongement, on peut trouver des estimations sur les valeurs propres d'un opérateur différentiel A, qui est auto-adjoint et à résolvante compacte. Voir *Exercices* pour des exemples, et la démonstration du résultat que nous avons énoncé pour le problème de Neumann. □

4. Un problème semilinéaire non homogène

Dans ce paragraphe nous étudions l'existence de solutions pour l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, pour une fonction $f \in L^2(\Omega)$ fixée et $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p < (N+2)$. On pourrait naturellement appliquer la méthode présentée ici à d'autres équations du type $Au = g(\cdot, u) + f$, où A est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte et $g(\cdot,\cdot)$ est une fonction *sur-quadratique* continue et à croissance *sous-critique* satisfaisant certaines conditions techniques. Comme le traitement général de ces équations n'apporte rien de particulier pour éclaircir la démarche à suivre, nous laisserons de telles généralisations au lecteur.

Pour résoudre (4.1), en suivant S.I. Pohožaev [132] et A. Bahri [10] nous allons introduire la fonction J définie par :

$$\begin{aligned} E(v) &:= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1} - \int_\Omega f(x)v(x)dx, \\ J(v) &:= \max_{\lambda>0} E(\lambda v). \end{aligned} \tag{4.2}$$

En fait S.I. Pohožaev définit J en prenant $\max_{\lambda\in\mathbb{R}} E(\lambda v)$, ce qui fait que la fonction ainsi définie est *paire*. Mais étant donnée la forme particulière de E dans le cas que nous étudions ici, la fonction $v \mapsto \max_{\lambda\in\mathbb{R}} E(\lambda v)$ n'est pas de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$. L'avantage de J, comme nous allons le voir, est que c'est une fonction positive qui a les mêmes valeurs critiques que E.

4.1 Proposition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, $p > 1$ un réel tel que $(N-2)p \le N+2$ et J définie par (4.2). Alors J est de classe C^1 sur $[J > 0]$, et pour $v \in [J > 0]$ il existe un unique $\lambda(v) > 0$ tel que $J(v) = E(\lambda(v)v)$. De plus l'application $v \mapsto \lambda(v)$ est de classe C^1 sur l'ensemble $[J > 0]$ et on a*

$$J'(v) = \lambda(v)E'(\lambda(v)v).$$

En particulier si $v \in [J > 0]$ est point critique de J, alors $\lambda(v)v$ est point critique de E. En notant $M := \{v \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \|v\|_{p+1} = 1\}$, si $v \in [J > 0]$ est point critique de J sur M, alors v est point critique de J.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $[J > 0]$ est un ouvert non vide. En effet puisque J est constante sur les demi-droites, pour déterminer $J(v)$, ou vérifier que $J(v) > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\|v\|_{p+1} = 1$. Ensuite on peut écrire

$$E(v) \ge \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{p+1} - \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla v\|,$$

ce qui montre que si $\|\nabla v\|$ est suffisamment grand, alors $E(v) > 0$ et par conséquent $J(v) > 0$. Pour voir que $v \mapsto \lambda(v)$ est bien définie, lorsque $J(v) > 0$, il suffit d'écrire

$$E(\lambda v) = g(\lambda) := \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1} - \lambda\langle f, v\rangle,$$

et de noter que si $J(v) > 0$, alors le maximum de g sur $]0, \infty[$ est atteint en un point λ_* tel que $g'(\lambda_*) = 0$, i.e.

$$g'(\lambda_*) = \langle E'(\lambda_* v), v\rangle = \lambda_*\|\nabla v\|^2 - \lambda_*^p\|v\|_{p+1}^{p+1} - \langle f, v\rangle = 0.$$

Comme $\langle f, v\rangle < \frac{1}{2}\lambda_*\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{p+1}\lambda_*^p\|v\|_{p+1}^{p+1}$, car $J(v) > 0$, on a

$$g''(\lambda_*) < \frac{-p(p-1)}{p+1}\,\lambda_*^{p-1}\|v\|_{p+1}^{p+1} < 0.$$

Puisque g ne peut admettre qu'un unique maximum positif, en notant $\lambda(v) := \lambda_*$, sachant que $g''(\lambda_*) < 0$, on conclut par le théorème des fonctions implicites que $v \mapsto \lambda(v)$ est de classe C^1, et il en est de même de J sur l'ensemble ouvert $[J > 0]$. On a également de façon évidente :

$$\begin{aligned}\langle J'(v), w\rangle &= \langle E'(\lambda(v)v), w\rangle + \langle E'(\lambda(v)v), v\rangle\langle\lambda'(v), w\rangle \\ &= \langle E'(\lambda(v)v), w\rangle,\end{aligned}$$

car $g'(\lambda(v)) = \langle E'(\lambda(v)v), v\rangle = 0$ par la définition même de $\lambda(v)$. Notons enfin que si $v \in [J > 0]$ est un point critique de J sur $M := \big\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \|u\|_{p+1} = 1\big\}$, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $J'(v) = \mu|v|^{p-1}v$, et en particulier en calculant $\langle J'(v), v\rangle$ on voit que :

$$\mu = \langle J'(v), v\rangle = \langle E'(\lambda(v)v), v\rangle = 0,$$

ce qui signifie que $J'(v) = 0$, i.e. que v est point critique de J. □

Dans la suite on notera

$$M := \Big\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \|u\|_{p+1}^{p+1} = 1\Big\} \tag{4.3}$$

et, dans le cas particulier où $f \equiv 0$, on posera $J_0(v) := J(v)$, ainsi que $\lambda_0(v) := \lambda(v)$. Dans ce cas on a pour $v \neq 0$,

$$E_0(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1},$$

$$\lambda_0(v) = \left(\frac{\|\nabla v\|^2}{\|v\|_{p+1}^{p+1}}\right)^{1/(p-1)}, \tag{4.4}$$

$$J_0(v) = \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\frac{\|\nabla v\|}{\|v\|_{p+1}}\right)^{2(p+1)/(p-1)}. \tag{4.5}$$

Nous avons les estimations suivantes pour relier J et J_0 :

4.2 Lemme. *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Il existe des constantes $R_0, c > 0$ dépendant uniquement de $p > 1$ et $\|f\|_{H^{-1}}$ telles que si $v \in M$ et $\|\nabla v\| \geq R_0$ alors on a $J(v) > 0$ et $|\lambda(v) - \lambda_0(v)| \leq 1$, ainsi que*

$$|J(v) - J_0(v)| \leq c\left(1 + J(v)^{1/(p+1)}\right),$$
$$|J(v) - J_0(v)| \leq c\left(1 + J_0(v)^{1/(p+1)}\right).$$

Démonstration. En prenant $v \in M$, on a $\lambda_0 := \lambda_0(v) = \|\nabla v\|^{2/(p-1)}$, et en notant $g(\lambda) := E(\lambda v)$, on voit que l'on a

$$g'(\lambda_0 \pm 1) = \pm\|\nabla v\|^2 - [(\lambda_0 \pm 1)^p - \lambda_0^p] - \langle f, v\rangle.$$

Comme $|\langle f, v\rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla v\|$, on peut voir sans difficulté que

$$g'(\lambda_0 + 1) \leq -(p-1)\|\nabla v\|^2 + \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla v\|,$$

car $(\lambda_0 + 1)^p \geq \lambda_0^p + p\lambda_0^{p-1}$. Par conséquent on peut fixer $R_0 > 0$ assez grand (dépendant uniquement de $p > 1$ et $\|f\|_{H^{-1}}$) tel que pour tout $v \in M$ avec $\|\nabla v\| \geq R_0$ on ait $g'(\lambda_0 + 1) < 0$. De la même manière, si $0 < \varepsilon < 1 - [(p+1)/2p]^{1/(p-1)} =: \varepsilon_*$, alors

$$(1-\varepsilon)^p < 1 - \frac{p+1}{2}\varepsilon,$$

ce qui, pour $\varepsilon := \|\nabla v\|^{-2/(p-1)} < \varepsilon_*$, implique

$$\begin{aligned} g'(\lambda_0 - 1) &\geq -\|\nabla v\|^2 + \|\nabla v\|^{2p/(p-1)}\left[1 - (1-\varepsilon)^p\right] - \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla v\| \\ &\geq \frac{p-1}{2}\|\nabla v\|^2 - \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla v\|. \end{aligned}$$

On en conclut, en augmentant éventuellement R_0, que si $\|\nabla v\| \geq R_0$, on a $g'(\lambda_0 - 1) > 0$, et finalement que

$$|\lambda(v) - \lambda_0(v)| \leq 1.$$

Par ailleurs, on sait que

$$J(v) = \frac{p-1}{2(p+1)}\lambda(v)^2\|\nabla v\|^2 - \frac{p}{p+1}\lambda(v)\langle f, v\rangle$$

et en tenant compte de l'estimation de $\lambda(v)$ que l'on vient d'obtenir, on constate que, si $\|\nabla v\| \geq R_0$ pour un R_0 assez grand, on a $J(v) > 0$. On conclut la preuve du lemme en rappelant que $2(p+1)J_0(v) = (p-1)\lambda_0(v)^{p+1}$ et donc

$$|J(v) - J_0(v)| \leq c\left(1 + J_0(v)^{1/(p+1)}\right),$$

pour une constante $c > 0$ et pour tout $v \in M$ tel que $\|\nabla v\| \geq R_0$; on peut voir de la même manière que $|J(v) - J_0(v)| \leq C_\varepsilon\left(1 + J(v)^{1/(p+1)}\right)$. □

4.3 Lemme. *On suppose que $p > 1$ vérifie $(N-2)p < N+2$ et que $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors R_0 étant donné par le lemme 4.2, la fonction J satisfait la condition de Palais-Smale sur M en tout point de $[\|\nabla v\| \geq R_0] \cap [J \geq \delta]$, pour tout $\delta > 0$. Plus précisément si $c_* > 0$, toute suite $(u_n, \mu_n)_n$ de $M \times \mathbb{R}$ telle que $\|\nabla u_n\| \geq R_0$ et*

$$J'(u_n) + \mu_n |u|^{p-1} u_n \to 0 \ \text{ dans } \ H^{-1}(\Omega), \qquad J(u_n) \to c_*,$$

contient une sous-suite $(u_{n_j}, \mu_{n_j})_j$ telle que $(u_{n_j})_j$ converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et $\mu_{n_j} \to 0$.

Démonstration. Le lemme 4.2 implique en particulier que $J_0(u_n)$ est bornée, et donc que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} |\mu_n| &= \left|\langle J'(u_n) + \mu_n |u_n|^{p-1} u_n, u_n \rangle\right| \\ &\leq \|J'(u_n) + \mu_n |u_n|^{p-1} u_n\|_{H^{-1}} \, \|\nabla u_n\|, \end{aligned}$$

et $\mu_n \to 0$. Posons $v_n := \lambda(u_n) u_n$; alors $E'(v_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $(v_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et $E(v_n) = J(v_n)$ tend vers c_*. Or en procédant comme dans l'exemple **3.**6.4 on montre que E satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent on peut extraire une suite $(v_{n_j})_j$ de $(v_n)_n$ et une suite $(\lambda(u_{n_j}))_j$ de $(\lambda(u_n))_n$ telles que $v_{n_j} \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $E(v) = c_* \geq \delta$, et $\lambda(u_{n_j}) \to \lambda^*$. On en déduit que $v \neq 0$ et $\lambda^* \neq 0$; puisque $u_{n_j} = \lambda(u_{n_j})^{-1} v_{n_j}$ tend vers $(\lambda^*)^{-1} v$, le lemme est prouvé. □

Comme plus haut nous introduisons les suites de nombres

$$a_k^0 := \inf_{A \in \mathscr{A}_k} \max_{v \in A} J_0(v), \qquad b_k^0 := \inf_{B \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in B} J_0(v), \tag{4.6}$$

$$a_k := \inf_{A \in \mathscr{A}_k} \max_{v \in A} J(v), \qquad b_k := \inf_{B \in \mathscr{B}_k} \max_{v \in B} J(v), \tag{4.7}$$

où $\mathscr{A}_k$ et $\mathscr{B}_k$ sont définis par (2.4) et (2.5) et M est défini en (4.3). En utilisant le lemme 3.5 on peut montrer les estimations suivantes sur la croissance de ces suites :

4.4 Lemme. *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Si $\tau = 2/N$ lorsque $N \geq 3$ et $\tau = 1 - \varepsilon$ pour $0 < \varepsilon < 1$ arbitraire lorsque $N = 2$, alors il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $a_k^0 \geq c_1 k^{\tau(p+1)/(p-1)}$. De même il existe $k_0 \geq 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $k \geq k_0$ on ait :*

$$a_k \geq c k^{\tau(p+1)/(p-1)}.$$

Démonstration. La minoration de a_k^0 est une conséquence directe du lemme 3.5, puisque $2(p+1)J_0(v) = (p-1)J_*(v)^{(p+1)/(p-1)}$. On sait par ailleurs que si $A \in \mathscr{A}_k$, il existe $u \in A \cap H_{k-1}^{\perp}$ où H_{k-1} est l'espace engendré par $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$. En particulier on a

$$\max_{v \in A} J_0(v) \geq J_0(u), \qquad \max_{v \in A} J(v) \geq J(u).$$

Mais puisque $\lambda_k \|u\|^2 \leq \|\nabla u\|^2$, d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on peut écrire

$$1 = \|u\|_{p+1} \le C\|u\|^{1-\theta}\|\nabla u\|^{\theta} \le C\lambda_k^{(1-\theta)/2}\|\nabla u\|,$$

avec $\theta = N\left(2^{-1} - (p+1)^{-1}\right) < 1$; on en déduit en particulier que si $k \ge k_0$ on a $\|\nabla u\| \ge c_2\lambda_{k_0}^{(1-\theta)/2}$, et qu'en prenant k_0 assez grand, R_0 étant donné par le lemme 4.2, pour tout $k \ge k_0$ fixé on a $\|\nabla u\| \ge R_0$. Cela signifie que pour $k \ge k_0$ on a

$$a_k^0 = \inf_{A\in\mathscr{A}_k} \max\{J_0(v)\,; v \in A,\ \|\nabla v\| \ge R_0\},$$
$$a_k = \inf_{A\in\mathscr{A}_k} \max\{J(v)\,; v \in A,\ \|\nabla v\| \ge R_0\}.$$

Mais il est clair que l'on peut trouver des constantes $c_1, c_2 > 0$, dépendant uniquement de p et $\|f\|_{H^{-1}}$, telles que pour $v \in M$ et $\|\nabla v\| \ge R_0$ on ait

$$J(v) \ge \frac{1}{2}J_0(v) - c_1, \qquad J_0(v) \ge \frac{1}{2}J(v) - c_2,$$

ce qui permet de conclure que $a_k \ge a_k^0/2 - c_1$ pour tout $k \ge k_0$ et, en utilisant l'estimation déjà établie pour a_k^0, on conclut la preuve du lemme (on aura noté que la constante $1/2$ pourrait être remplacé par $1-\delta$ pour tout $\delta > 0$). □

L'étape suivante consiste à montrer une sorte de lemme de Gronwall discret.

4.5 Lemme. *Soient $p > 1$ et une suite positive $(\alpha_k)_{k\ge1}$ telle que pour une constante $c_0 > 0$ et un entier $k_0 \ge 1$ on ait*

$$\forall k \ge k_0, \qquad \alpha_{k+1} \le \alpha_k + c_0\left(1 + \alpha_k^{1/(p+1)}\right).$$

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $k \ge k_0$

$$\alpha_k \le ck^{(p+1)/p}.$$

Démonstration. Si $c \ge c_* := \max\left\{k^{-(p+1)/p}\alpha_k\,; k_0 \le k \le 2k_0\right\}$, l'inégalité demandée est satisfaite. Supposons que la constante c est telle que pour un entier $j \ge 2k_0$, on a $\alpha_i \le c\, i^{(p+1)/p}$ pour $k_0 \le i \le j$. Alors on sait que $\alpha_{j+1} \le \alpha_j + c_0\left[1 + (c\, j^{(p+1)/p})^{1/(p+1)}\right]$ et par conséquent :

$$\alpha_{j+1} \le \alpha_{k_0} + c_0\sum_{k=k_0}^{j}\left(1 + c^{1/(p+1)}k^{1/p}\right)$$
$$\le \alpha_{k_0} + (j+1-k_0)c_0 + c_0c^{1/(p+1)}\sum_{k=k_0}^{j}k^{1/p}\,.$$

Or on a

$$\sum_{k=k_0}^{j}k^{1/p} \le \int_{k_0}^{j}s^{1/p}ds \le \frac{p}{p+1}j^{(p+1)/p}\,,$$

ce qui implique finalement

$$\alpha_{j+1} \le \alpha_{k_0} + (j+1-k_0)c_0 + \frac{p}{p+1}c_0c^{1/(p+1)}j^{(p+1)/p}\,.$$

Pour prouver le lemme, on demande donc de trouver une constante $c \geq c_*$ telle que pour tout $j \geq 2k_0$ on ait

$$\alpha_{k_0} + (j + 1 - k_0)c_0 + \frac{p}{p+1} c_0 c^{1/(p+1)} j^{(p+1)/p} \leq c(j+1)^{(p+1)/p} ,$$

ce qui est possible en prenant $c \geq c_*$ assez grand. □

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver le théorème suivant :

4.6 Théorème. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$, et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N$. Alors pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, l'équation (4.1) admet une infinité de solutions $(u_k)_k$ telles que $\|\nabla u_k\|$ tend vers l'infini.*

Démonstration. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, la fonction J étant définie par (4.2), il suffit de montrer que J possède une infinité de points critiques, par exemple sur M. Comme J satisfait la condition de Palais-Smale sur $M \cap [\nabla v \geq R_0] \cap [J \geq \delta]$ pour $\delta > 0$, d'après le théorème 2.2, il nous reste à montrer que pour une infinité de $k \geq 1$ on a $\delta \leq a_k < b_k$, ces nombres étant définis par (4.7).

Comme $a_k \leq b_k$ et que $a_k \to \infty$ lorsque $k \to \infty$, on sait que pour k assez grand on a $a_k \geq \delta$. Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on ait $a_k = b_k$. D'après le lemme 4.2 on a

$$J_0(v) \leq J(v) + c_1 \left(1 + J(v)^{1/(p+1)}\right),$$
$$J(v) \leq J_0(v) + c_2 \left(1 + J_0(v)^{1/(p+1)}\right),$$

ce qui permet de conclure que

$$a^0_{k+1} = b^0_k \leq b_k + c_1 \left[1 + b_k^{1/(p+1)}\right] ,$$
$$a_{k+1} \leq a^0_{k+1} + c_2 \left[1 + (a^0_{k+1})^{1/(p+1)}\right] ,$$

et finalement, si on avait $a_k = b_k$ pour tout $k \geq k_0$, comme $a_k \to \infty$, pour une constante positive c_3 on devrait avoir pour tout $k \geq k_1$ (où $k_1 \geq k_0$ est suffisamment grand) :

$$a_{k+1} \leq a_k + c_3 \left[1 + a_k^{1/(p+1)}\right] .$$

Le lemme 4.5 implique alors qu'il existe une constante $c_4 > 0$ telle que $a_k \leq c_4 k^{(p+1)/p}$ pour tout $k \geq k_1$. Mais le lemme 4.4 donne une estimation inférieure $a_k \geq c_0 k^\alpha$ avec $\alpha := \tau(p+1)/(p-1)$ où $\tau = 2/N$ si $N \geq 3$ et $\tau = 1 - \varepsilon$ si $N = 2$, et cela nécessite que, par exemple si $N \geq 3$,

$$\frac{2(p+1)}{N(p-1)} \leq \frac{p+1}{p},$$

c'est à dire $p \geq N/(N-2)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Lorsque $N = 2$, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, on aboutit à une contradiction de la même manière.

Dans le cas où $N = 1$, l'estimation *imprécise* obtenue au lemme 3.3, implique que $a_k^0 \geq c_1 k^\alpha$ avec $\alpha := (p+3)/(p-1)$, et comme pour tout $p > 1$ on a $(p+3)/(p-1) > (p+1)/p$, on conclut que l'on ne peut pas avoir $a_k = b_k$ pour tout $k \geq k_1$. □

4.7 Remarque. Le résultat que nous venons de voir a été prouvé, indépendamment et par des méthodes différentes, par M. Struwe [155] et A. Bahri & H. Berestycki [11], (voir aussi P.H. Rabinowitz [138]) pour le cas où $1 < p < p_0$, avec p_0 la plus grande solution de l'équation $(2p_0+1)/p_0 = 2(p_0+1)/(N(p_0-1))$ (cela est dû à l'utilisation de l'estimation *imprécise* du lemme 3.3). Lorsque $(N-2)p < N$, comme nous l'avons déjà évoqué, le résultat est dû à un affinement de l'estimation sur la croissance de la suite a_k^0, par A. Bahri & P.L. Lions [15]. Comme par ailleurs on peut prouver que l'estimation du lemme 3.5 est optimale (voir [15] et *Exercices*), la méthode que nous avons exposée ne semble pas permettre de prouver que l'équation (4.1) admet une solution pour tout p tel que $(N-2)p < N+2$ et tout $f \in H^{-1}(\Omega)$. Nous devons également dire qu'un résultat de A. Bahri [10] affirme que lorsque $(N-2)p < N+2$, l'ensemble des $f \in H^{-1}(\Omega)$ pour lesquels (4.1) admet une infinité de solutions est un ensemble G_δ-dense de $H^{-1}(\Omega)$ (rappelons qu'on dit qu'un ensemble est G_δ-dense s'il est une intersection dénombrable d'ouverts denses).

5. Problèmes de demi-valeurs propres

Lorsque l'on s'intéresse à la résolution de problèmes du type :

$$\text{trouver } u \in D(L), \qquad Lu = g(u) + h, \tag{5.1}$$

où $h \in L^2(\Omega)$ est donnée, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $L : D(L) \to L^2(\Omega)$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte, nous avons vu aux chapitres 2 et 3 que les comportements de g aux voisinages de zéro, $+\infty$ et $-\infty$ déterminent, en quelque sorte, l'existence ou la non-existence de solutions pour (5.1). Ici nous nous intéressons au cas où la "non-linéarité" g est demi-linéaire à l'infini en ce sens que :

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} =: a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} =: b \in \mathbb{R}.$$

Ainsi on peut écrire $g(s) = as^+ - bs^- + g_0(s)$ où $s^+ := \max(s, 0)$, et $s^- := (-s)^+$ (de sorte que $s = s^+ - s^-$) et

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g_0(s)}{s} = 0.$$

Si l'intervalle fermé $[a, b]$ (ou $[b, a]$) ne contient aucune valeur propre de L, alors un argument d'homotopie compacte et le degré de Leray-Schauder permettent de prouver l'existence d'au moins une solution, pour toute $h \in L^2(\Omega)$

donnée. Lorsque $a = b \in \mathrm{Sp}(L)$, on dit que (5.1) est en "résonance" — par analogie avec le cas linéaire où le problème est résolu par l'alternative de Fredholm —, et E.M. Landesman & A.C. Lazer [93] ont observé que (5.1) a une solution si pour tout $\varphi \in N(L - aI) - \{0\}$:

$$\int_\Omega h(x)\varphi(x)dx < g_0(+\infty)\int_\Omega \varphi^+(x)dx - g_0(-\infty)\int_\Omega \varphi^-(x)dx.$$

où $g_0(\pm\infty) := \lim_{s\to\pm\infty} g_0(s)$ et on suppose que $g_0(+\infty)g_0(-\infty) \leq 0$ (ici $N(L - aI)$ désigne le noyau de $L - aI$, c'est à dire le sous-espace propre associé à a ; pour ces aspects voir paragraphe § **2.**7). En fait dans [93] il est supposé que $a = b$ est une valeur propre simple, mais des démonstrations ultérieures de ce résultat n'utilisent pas cette hypothèse (voir par exemple H. Brezis & L. Nirenberg [35], P. Hess [81], Th. Gallouët & O. Kavian [71]). Ces deux dernières références donnent une démonstration simple du résultat cité. (cf. [71, remark 1, p. 336] et paragraphe § 7 du chapitre 2).

Lorsque $a \neq b$ et le couple (a, b) "*chevauche*" une valeur propre de L, i.e. l'intervalle $[a, b]$ contient des éléments de $\mathrm{Sp}(L)$, la situation est tout à fait différente parce que, en général, on ne peut trouver d'estimation *a priori* des solutions éventuelles de (5.1). En effet même lorsque $g_0 \equiv 0$ et $h = 0$, il se peut que l'équation homogène

$$u \in D(L), \qquad Lu = au^+ - bu^-, \tag{5.2}$$

admette une solution $u \neq 0$ et de ce fait l'ensemble des solutions de (5.2) pourrait contenir une demi-droite $\mathbb{R}_+ u$. En réalité pour que l'on puisse utiliser des arguments d'homotopie compacte, il faut savoir si (5.2) a des solutions autres que la solution nulle (mais cela ne suffit pas pour conclure).

Le premier résultat dans le cas où $a \neq b$ a été celui de A. Ambrosetti & G. Prodi [5] ; ces auteurs considèrent le cas $L := -\Delta$ avec $D(L) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $b < \lambda_1 < a < \lambda_2$ et Ω est un ouvert borné régulier. Dans ce cas, il est facile de vérifier que (5.2) n'a pas de solution autre que zéro et que, par conséquent, on peut trouver des estimations a priori des solutions éventuelles de (5.2) (voir *Exercices*). Mais il y a une nouvelle difficulté due au fait qu'en zéro, le degré de Leray-Schauder de l'opérateur $u \mapsto u - L^{-1}[g(u) + h]$ est nul, et par conséquent il faut regarder de plus près l'image de l'opérateur $u \mapsto Lu - g(u)$. Une analyse précise permet alors de dire que cette image est (parfois convexe) différente de $L^2(\Omega)$, et que suivant la donnée $h \in L^2(\Omega)$, il y a zéro, une ou deux solutions.

Il y a eu ensuite les travaux de S. Fučik [66, 67], E.N. Dancer [52–54], J.L. Kazdan & F.W. Warner [88] (sans être exhasutif) où (5.1) et le problème homogène associé (5.2) sont étudiés sous diverses hypothèses sur la nature de la valeur propre λ_k chevauchée par (a, b) et lorsque la différence $|b - a|$ est assez petite. En particulier S. Fučik étudie le cas où L correspond à un problème de Sturm-Liouville en dimension un, et E.N. Dancer étudie différentes situations où le problème (5.2) est supposé ne pas avoir de solution non nulle ; il prouve alors

que (5.1) a une solution lorsque (a,b) peut être "*relié*" à un point de la diagonale de $\mathbb{R}^2$, différent d'une valeur propre de L.

Puis B. Ruf [146] et Th. Gallouët & O. Kavian [70] — indépendamment et par des méthodes différentes —, ont montré que si λ_k est une valeur propre simple de L, il existe dans le carré

$$\Lambda_k := [\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}] \times [\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}] \tag{5.3}$$

de $\mathbb{R}^2$, deux courbes Γ_k^1 et Γ_k^2 (l'une étant symétrique de l'autre par rapport à la diagonale de $\mathbb{R}^2$) telles que pour $(a,b) \in \Lambda_k$, l'équation (5.2) a une solution si, et seulement si, $(a,b) \in \Gamma_k^1 \cup \Gamma_k^2$. Lorsque (5.2) n'a pas de solution autre que zéro on peut alors montrer que :

- Si (a,b) appartient à une composante connexe de $\Lambda_k \setminus (\Gamma_k^1 \cup \Gamma_k^2)$ rencontrant la diagonale, alors pour tout h donnée dans $L^2(\Omega)$, le problème (5.1) admet une solution (cette situation arrive en particulier lorsque $\Gamma_k^1 = \Gamma_k^2$, auquel cas il y a deux composantes connexes qui contiennent toutes deux une partie de la diagonale).
- Sinon c'est la situation du problème résolu par A. Ambrosetti & G. Prodi dans [5] qui se présente : suivant la donnée h, le problème (5.1) peut avoir zéro, (au moins) une ou (au moins) deux solutions.

Lorsque (5.2) admet des solutions non nulles alors il y a "résonance" et "chevauchée" d'une valeur propre simple et Th. Gallouët & O. Kavian [71] ont donné une condition suffisante sur h, généralisation naturelle de celle de Fredholm et de Landesman-Lazer, qui assure l'existence d'une solution pour (5.1).

Quand (a,b) chevauche λ_k, une valeur propre multiple de L, les méthodes employées dans [146] et [70] ne peuvent plus être appliquées. Dans ce cas nous allons montrer au paragraphe suivant, par une méthode variationnelle utilisant le théorème 2.2, l'existence dans le carré Λ_k d'une famille de deux courbes continues et monotones $\left\{\Gamma_k^1, \Gamma_k^2\right\}_k$ (symétriques l'une de l'autre, mais éventuellement on peut avoir $\Gamma_k^1 = \Gamma_k^2$) qui se coupent au point (λ_k, λ_k) et qui sont contenues dans le *spectre demi-linéaire* (on dit aussi *spectre de Fučik*) de L i.e. dans l'ensemble

$$\mathrm{Sdl}(L) := \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \exists u \in D(L) \setminus \{0\}\,,\; Lu = au^+ - bu^-\right\}. \tag{5.4}$$

On pourrait alors donner des résultats d'existence ou de non-existence de solutions pour (5.1) mais néanmoins ces résultats ne sont pas aussi précis que dans le cas de la chevauchée (sans résonance) d'une valeur propre simple, du fait que nous ne savons pas si $\mathrm{Sdl}(L)$ est composé exactement des courbes Γ_k^1, Γ_k^2 (et de leurs prolongements à $\mathbb{R}^2$).

Ces questions sont intéressantes dans la mesure où lorsque g est asymptotiquement linéaire à l'infini, le problème (5.1) est un premier exemple de problème non-linéaire sans symétrie et sans monotonie. Il s'agit donc de comprendre comment une non-linéarité $u \mapsto g(u)$ affecte l'image d'un opérateur linéaire comme L.

6. Existence de demi-valeurs propres

Dans toute la suite L désigne un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte défini sur $D(L) \subset L^2(\Omega)$, à valeurs dans $L^2(\Omega)$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue ou d'une mesure régulière, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, mais que nous noterons toujours dx). On rappelle que $D(L)$ est dense dans $L^2(\Omega)$; de plus, L à résolvante compacte signifie que l'injection de $D(L)$ (muni de la norme du graphe $\|\cdot\|_{D(L)}$) dans $L^2(\Omega)$ est compacte ; la norme de $L^2(\Omega)$ sera notée $\|\cdot\|$ et son produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Sans perdre de généralité en ce qui concerne l'étude de (5.1) ou de (5.2) on peut supposer (et nous le ferons) que L est inversible i.e. $0 \notin \mathrm{Sp}(L)$. Dans un souci de simplification de l'exposé (voir *Exercices* pour le cas général) on supposera que le spectre de L est inférieurement borné, ce qui revient à dire dans le cas présent que si $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ est la suite croissante des valeurs propres de L on a $\lambda_1 > 0$. Les cas où L n'est pas à résolvante compacte — par exemple l'opérateur des ondes en dimension un avec conditions périodiques en temps, Dirichlet en espace — ou lorsque le spectre de L est réparti sur $]-\infty, +\infty[$ peuvent être traités de façon analogue mais plus laborieuse. La multiplicité de chaque valeur propre λ_k sera désignée par $m_k \geq 1$ et le sous-espace propre associé par $N(L - \lambda_k I)$.

Pour $u \in L^2(\Omega)$ on désigne par u_k sa projection sur $N(L - \lambda_k I)$, i.e.

$$u_k := \mathrm{proj}_{|N(L-\lambda_k I)}(u)$$

et par H le domaine de $L^{1/2}$ c'est à dire l'espace

$$H := \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \sum_{k\geq 1} \lambda_k \|u_k\|^2 < \infty\}.$$

Enfin H' étant le dual de H (de telle sorte que $H \subset L^2(\Omega) \subset H'$), L sera considéré parfois comme une bijection de H sur H' et par commodité, si $u \in H$, on écrira $(Lu|u) := \|L^{1/2}u\|^2$. On définit le spectre demi-linéaire de L par (5.4). Comme $(a, b) \in \mathrm{Sdl}(L)$ si, et seulement si, $(b, a) \in \mathrm{Sdl}(L)$, il suffit de trouver des points de $\mathrm{Sdl}(L)$ tels que $b - a \geq 0$. Remarquons qu'alors

$$Lu + tu^- = cu \iff (c, t + c) \in \mathrm{Sdl}(L),$$

et ainsi, pour $t \geq 0$ donné, nous nous attacherons à trouver $c(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\exists u \in D(L) \setminus \{0\}, \qquad Lu + tu^- = c(t)u. \tag{6.1}$$

Le premier résultat dans ce domaine est :

6.1 Théorème. *Soit λ_k une valeur propre de L de multiplicité $m_k \geq 1$ et $\lambda_{k-1} < \lambda_k$ la plus proche valeur propre inférieure à λ_k, en convenant de poser $\lambda_0 := -\infty$. Il existe alors deux fonctions c_k^i (i = 1,2) définies de $[0, \lambda_k - \lambda_{k-1}] \longrightarrow [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, continues et décroissantes telles que $c_k^i(0) = \lambda_k$ et les courbes :*

$$\Gamma_k^1 := \left\{(c_k^1(t), t + c_k^1(t))\ ;\ 0 \leq t \leq \lambda_k - \lambda_{k-1}\right\},$$
$$\Gamma_k^2 := \left\{(c_k^2(t) - t, c_k^2(t))\ ;\ 0 \leq t \leq \lambda_k - \lambda_{k-1}\right\},$$

sont contenues dans $\mathrm{Sdl}(L)$. *Plus précisément Pour chaque* t *fixé dans* $[0, \lambda_k - \lambda_{k-1}]$, $c_k^1(t)$ *(resp.* $c_k^2(t)$*) est une valeur critique de la fonction* $J_t(u) := (Lu|u) - t\|u^-\|^2$ *(resp.* $J_t(u) := (Lu|u) - t\|u^+\|^2$*) sur* M, *la sphère unité de* $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Il est clair que J_t est une fonction de classe C^1 et qu'elle satisfait la condition de Palais-Smale sur M et nous allons appliquer le théorème 2.2. Pour $k \geq 1$ on considère une suite de fonctions propres $(\varphi_{k,i})_{1\leq i\leq m_k}$ de L telles que $L\varphi_{k,i} = \lambda_k\varphi_{k,i}$ et $(\varphi_{k,i}|\varphi_{j,\ell}) = \delta_{kj}\delta_{i\ell}$. En désignant par H_{k-1} le sous-espace

$$H_{k-1} := \bigoplus_{1\leq i\leq k-1} N(L - \lambda_i),$$

on notera j la dimension de H_{k-1}. Puis on définit les ensembles :

$$\mathscr{A}_j := \left\{h(S^{j-1}) \ ; \ h \in C(S^{j-1}, M) \ \text{ impaire}\right\}, \tag{6.2}$$

$$\mathscr{B}_j := \left\{h(S^j_+) \ ; \ h \in C(S^j, M), \ h_{|S^{j-1}} \text{ impaire}\right\}, \tag{6.3}$$

et les nombres

$$a_j(t) := \inf_{A\in\mathscr{A}_j} \max_{u\in A} J_t(u) \tag{6.4}$$

$$b_j(t) := \inf_{B\in\mathscr{B}_{j+1}} \max_{u\in B} J_t(u). \tag{6.5}$$

On notera que $a_j(t)$ et $b_j(t)$ sont finis, que $a_j(t) \leq b_j(t)$, et que $a_j(0) = \lambda_{k-1}$ et $b_j(0) = a_{j+1}(0) = \lambda_k$. Mais il est facile de voir que si $t \geq 0$ on a

$$J_0(u) - t \leq J_t(u) \leq J_0(u),$$

et que par conséquent

$$\lambda_{k-1} - t \leq a_j(t) \leq \lambda_{k-1}, \qquad \lambda_k - t \leq b_j(t) \leq \lambda_k.$$

On en déduit que si $0 \leq t < \lambda_k - \lambda_{k-1}$, on a $a_j(t) < b_j(t)$, et le théorème 2.2 implique qu'en prenant $A_0 \in \mathscr{A}_j$ tel que

$$a_j(t) \leq \max_{u\in A} J_t(u) \leq a_j(t) + \varepsilon_*,$$

où $2\varepsilon_* := b_j(t) - a_j(t)$. En posant

$$c_k^1(t) := \inf_{C\in\mathscr{C}_k} \max_{u\in C} J_t(u),$$

$$\mathscr{C}_k := \left\{h(S^j_+) \ ; \ h(S^j_+), \ h_{|S^{j-1}} \ \text{ impair et } \ h(S^{j-1}) = A_0\right\},$$

alors $c_k^1(t)$ est valeur critique de J_t et on a $Lu + tu^- = c_k^1(t)u$ pour un $u \in M$. Ainsi $(c_k^1(t), c_k^1(t) + t)$ est un point de $\mathrm{Sdl}(L)$, et de plus on a $c_k^1(0) = \lambda_k$. Finalement en appliquant les arguments ci-dessus à la fonction $u \mapsto (Lu|u) - t\|u^+\|^2$, on obtient la fonction $c_k^2(t)$ et l'ensemble Γ_k^2.

Comme pour $\tau > 0$ et $\|u\| = 1$ on a $J_t(u) - \tau \leq J_{t+\tau}(u) \leq J_t(u)$, on montre facilement que $c_k^i(t)$ (pour $i = 1, 2$) est monotone décroissante et continue. □

6.2 Remarque. Lorsque λ_k est une valeur propre simple, on peut même montrer que les fonctions $c_k^i(t)$ sont dérivables. Dans ce cas (voir [85]), en paramétrisant la courbe Γ_k^1 par $a \mapsto b(a)$ où $(a, b(a)) \in \Gamma_k^1$, on peut montrer que si $Lu = au^+ - b(a)u^-$ avec $u \in D(L)$ et $\|u\| = 1$, alors

$$b'(a) = -\frac{\|u^+\|^2}{\|u^-\|^2}.$$

La même approche peut être utilisée pour montrer qu'il existe une famille de deux courbes continues Γ_k^1, Γ_k^2 dans $\mathbb{R}^2$ telles que pour $(a, b) \in \Gamma_k^1 \cup \Gamma_k^2$ l'équation homogène

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, \qquad -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = a|u^+|^{p-1} - b|u^-|^{p-1},$$

admet une solution, pour $1 < p < \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Exercices du chapitre 5

Exercice 1. Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ et $0 < \rho_1 \leq \rho_2$ deux fonctions de $L^q(\Omega)$ avec $q > N/2$. Montrer que si $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot))_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément coercive, alors les valeurs propres des problèmes (pour $i = 1, 2$) :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(\cdot)\nabla\varphi_{i,k}) = \lambda_{i,k}\,\rho_i\,\varphi_{i,k} & \text{dans } \Omega\,, \\ \varphi_{i,k} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \\ \|\varphi_{i,k}\|^2 = 1\,, & \end{cases}$$

vérifient $\lambda_{2,k} \leq \lambda_{1,k}$.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. En utilisant le théorème du col, montrer que si $p > 1$ est un réel tel que $(N-2)p < N+2$, alors il existe $R_* > 0$ tel que pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ avec $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} < R_*$, l'équation

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u + f$$

admet au moins une solution dans $H^1_0(\Omega)$.

De même en utilisant le théorème des fonction implicites montrer que si $(N-2)p \leq N+2$ et la norme de f est assez *petite*, l'équation ci-dessus admet une solution.

Exercice 3. Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts bornés et connexes de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $\lambda_k(\Omega_i)$ les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω_i pour $i = 1, 2$. Montrer que si $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, alors $\lambda_k(\Omega_2) < \lambda_k(\Omega_1)$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 4. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$ et $V \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ une fonction telle que $V^- \in L^{N/2}(\Omega)$. On considère l'opérateur L défini par $Lu := -\Delta u + Vu$ avec

$$D(L) := \left\{u \in H^1_0(\Omega)\ ;\ Vu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega),\ Lu \in L^2(\Omega)\right\}.$$

1) En utilisant le théorème de Rosenbljum-Lieb-Cwickel dans $\mathbb{R}^N$, montrer que $n(V)$, le nombre de valeurs propres négatives de L, peut être estimé par

$$n(V) \leq C(N) \int_\Omega |V^-(x)|^{N/2} dx$$

(sur $\mathbb{R}^N$ considérer l'opérateur $\widetilde{L}f := -\Delta f + 1_\Omega V f$).

2) En déduire qu'il existe une constante $c_0(N)$ telle que les valeurs propres λ_k du laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet, vérifient

$$\lambda_k \geq c_0(N)\,[\mathrm{mes}(\Omega)]^{-2/N}\ k^{2/N}\ .$$

Exercice 5. Soit Ω un ouvert de mesure finie et $\lambda_1(\Omega)$ définie par

$$\lambda_1(\Omega) := \inf\left\{\|\nabla u\|^2\ ;\ u \in H_0^1(\Omega),\quad \|u\|^2 = 1\right\}.$$

(Lorsque Ω est bornée, $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω). Montrer que si $\mathrm{mes}(\Omega) \to 0$, alors $\lambda_1(\Omega) \to +\infty$.

Exercice 6. Soit Ω un ouvert borné dans une direction, par exemple contenu dans $]0, a[\times\mathbb{R}^{N-1}$. Si $\lambda_1(\Omega)$ est définie par

$$\lambda_1(\Omega) := \inf\left\{\|\nabla u\|^2\ ;\ u \in H_0^1(\Omega),\quad \|u\|^2 = 1\right\},$$

montrer que lorsque $a \to 0$, alors $\lambda_1(\Omega) \to +\infty$.

Exercice 7. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, connexe et de classe C^1. On désigne par $\lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega)$ les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω, et par λ_k^{N} les valeurs propres du laplacien avec condition de Neumann sur Ω.

1) Montrer que l'on a toujours $\lambda_k^{\mathrm{N}}(\Omega) \leq \lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega)$.

2) Soit Ω_1 un ouvert quelconque tel que $\Omega \subset\subset \Omega_1$. En utilisant un théorème de prolongement, montrer qu'il existe une constante c_0 dépendant de Ω, Ω_1 telle que pour tout $k \geq 2$ on ait

$$\lambda_k^{\mathrm{N}}(\Omega) \geq c_0\ \lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega_1).$$

3) En déduire qu'il existe des constantes c_1, c_2 telles que pour tout $k \geq 2$ on ait :

$$c_1 k^{2/N} \leq \lambda_k^{\mathrm{N}}(\Omega) \leq c_2 k^{2/N}\ .$$

Exercice 8. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p > 2$. On considère la contrainte $S := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ ;\ \|u\|_p = 1\right\}$ et

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_k &:= \left\{h(S^{k-1})\ ;\ h : S^{k-1} \longrightarrow S,\ \text{ continue et impaire}\right\},\\ b_k(p) &:= \inf_{B\in\mathscr{B}_k}\ \max_{v\in B} \|\nabla v\|_p^p\ .\end{aligned}$$

Montrer que $b_k(p) \geq c_0\, k^m$ où c_0 est une constante dépendant de p, N, Ω et m est un réel dépendant de p, N.

Exercice 9. Avec les notations introduites en (4.6), montrer que l'estimation obtenue au lemme 4.4 est optimale en ce sens que si $N \geq 3$ alors pour tout $k \geq 1$ on a :

$$a_k^0 \leq c_2\ k^{\tau(p+1)/(p-1)}$$

où $\tau := 2/N$ et c_2 est une constante.

Exercice 10. Soit $(L, D(L))$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte sur $L^2(\Omega)$. Comme au paragraphe § 6, on désigne par H le domaine de $L^{1/2}$, et $S := \{v \in H \ ; \ \|v\| = 1\}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction

$$J_t(u) := (Lu|u) + t\,\|u^-\|^2,$$

satisfait la condition de Palais-Smale sur S.

Exercice 11. Trouver le spectre demi-linéaire de $Au := -u''$ avec $D(A) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, i.e. l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une fonction non-nulle u satisfaisant

$$-u'' = au^+ - bu^-, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Exercice 12. On désigne par $H^m_{\rm per}(0,\pi)$ l'ensemble des fonctions de $H^m_{\rm loc}(\mathbb{R})$ qui sont périodiques de période π, et on le munit de la norme induite par $H^m(0,\pi)$. Trouver le spectre demi-linéaire de $Au := -u''$ avec $D(A) := H^2_{\rm per}(0,\pi)$, i.e. l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une fonction non-nulle u de période π satisfaisant

$$\begin{cases} -u'' = au^+ - bu^- & \text{sur } \ ]0,\pi[\,, \\ u(x) = u(x+\pi) & \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

6 Problèmes sans compacité

Dans les chapitres précédents nous avons vu différents résultats permettant de résoudre en particulier les problèmes elliptiques semilinéaires, dans le cas où on dispose d'un résultat de compacité, par exemple lorsque l'on a une injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Quand on résout ce type de problèmes dans le cas où Ω est non borné, par exemple quand $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou quand Ω est borné mais $p = 2N/(N-2)$ et $N \geq 3$, avec la perte de compacité de cette injection on ne peut ni établir des conditions du type Palais-Smale, ni montrer que le minimum de la fonctionnelle d'énergie est atteint sur une contrainte appropriée. Pour illustrer ce propos, rappelons que l'injection de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ peut perdre sa compacité de deux façons. Si $p \geq 1$ et $(N-2)p \leq 2N$, en prenant $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ une fonction non identiquement nulle et $(x_j)_{j\geq 1}$ une suite de points de $\mathbb{R}^N$ telle que $|x_j| \to \infty$, on voit immédiatement que la suite $u_j(x) := \varphi(x+x_j)$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, tend p.p. vers zéro, mais ne contient aucune sous-suite convergeant dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (perte de compacité dûe au fait que le domaine va jusqu'à l'infini ; c'est la "bosse" allant à l'infini). De même si $N \geq 3$ et $p = 2^* = 2N/(N-2)$, la famille $u_\lambda(x) := \lambda^{-\tau}\varphi(\lambda^{-1}(x-x_0))$ avec $\tau := (N-2)/2$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\lambda \to 0$, tend p.p. vers zéro mais ne contient aucune sous-suite convergeant dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (c'est la "pointe" allant vers une masse de Dirac en x_0). Ce qui est remarquable, c'est que *grosso modo* ce sont presque les seules manières de perdre la compacité, et que tirant profit de ce fait, on peut changer légèrement la notion d'extraction de sous-suite pour retrouver une certaine notion de compacité.

Pour fixer les idées nous allons étudier le problème semilinéaire

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

essentiellement par trois méthodes différentes, ce qui permettra de voir dans quelles situations on peut utiliser l'une ou l'autre approche. Pour aborder l'étude de ce type de problèmes sans compacité à l'infini, mais avec compacité locale, on dispose de trois méthodes ou outils (qui sont liés, comme on le verra, de façon naturelle) : on peut travailler dans l'espace des fonctions à symétrie radiale (lemme de W. Strauss), on peut changer la notion d'extraction de sous-suite en effectuant une extraction de sous-suites suivie d'une suite de translations (lemme de E.H. Lieb), ou enfin utiliser la méthode de concentration-compacité (introduite par P.L. Lions) qui consiste à analyser ce que fait une suite de mesures bornées qui tend vers zéro faiblement.

On commence par le lemme de W. Strauss concernant les fonctions radiales.

1. Compacité des fonctions à symétrie sphérique

Rappelons qu'une fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $N \geq 2$, est dite à symétrie sphérique si pour toute matrice de rotation S agissant sur $\mathbb{R}^N$ on a :

$$\text{p.p. sur } \mathbb{R}^N, \qquad u(Sx) = u(x).$$

On dit alors que u est *radiale*, car pour tout $r > 0$, en posant $f(r) := u(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $|x| = r$, on définit p.p. sur $\mathbb{R}_+$ une fonction f qui permet de reconstruire entièrement u. Si la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$, on dit alors que u est *radiale décroissante*. On notera également que pour une fonction radiale ou à symétrie sphérique, en désignant par ϖ_N la mesure superficielle de la sphère unité S^{N-1} de $\mathbb{R}^N$, on a :

$$\|u\|_{L^p}^p = \varpi_N \int_0^\infty |f(r)|^p \, r^{N-1} dr.$$

On désignera par $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ le sous-espace fermé des fonctions radiales de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Si $u \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ et $f(r) = u(x)$ pour $|x| = r$, on peut voir sans difficulté que

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \varpi_N \int_0^\infty \left(|f(r)|^2 + |f'(r)|^2 \right) r^{N-1} dr,$$

et que les fonctions radiales de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ sont denses dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$.

1.1 Lemme. *Soit $N \geq 2$. Si $u \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on a p.p. sur $\mathbb{R}^N$:*

$$|u(x)| \leq \varpi_N^{-1/2} \, |x|^{\frac{-(N-1)}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

et de plus $|x|^{\frac{N-1}{2}} u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Par ailleurs dans la classe d'équivalence p.p. de u il existe une fonction höldérienne en dehors de l'origine.

Démonstration. Compte tenu de la densité des fonctions radiales de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer le lemme pour les fonctions régulières. Si $\varphi \in C_c^\infty([0, \infty[)$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(r)^2 &= -2 \int_r^\infty \varphi'(s)\varphi(s) ds \\
&\leq 2 \int_r^\infty s^{-(N-1)} |\varphi'(s)| \cdot |\varphi(s)| s^{N-1} ds \\
&\leq r^{-(N-1)} \int_r^\infty \left(|\varphi'(s)|^2 + |\varphi(s)|^2 \right) s^{N-1} ds,
\end{aligned}$$

et en particulier si $u \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi(r) := u(x)$ pour $|x| = r$, on déduit l'inégalité du lemme. Pour voir que dans la classe d'équivalence de

$u \in H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^N)$ il existe une fonction continue en dehors de l'origine, en posant $f(r) := u(x)$ si $r = |x|$, il suffit de voir comme ci-dessus que pour $|x| > |y| > 0$ on a :

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le \int_{|y|}^{|x|} |f'(s)| ds \\ &\le \big|\, |x| - |y| \,\big|^{1/2} \left(\int_{|y|}^{|x|} |f'(s)|^2 ds \right)^{1/2}, \\ &\le \big|\, |x| - |y| \,\big|^{1/2}\ |y|^{\frac{-(N-1)}{2}}\ \varpi_N^{-1/2}\, \|\nabla u\|, \end{aligned}$$

ce qui montre que u est höldérienne en dehors de l'origine. □

1.2 Théorème (W. Strauss). *Soient $N \ge 2$, $p > 1$ et $(N-2)p < N+2$. Alors l'injection de $H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ est compacte.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de $H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^N)$ convergeant faiblement vers $u \in H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^N)$. Si $v_n := u_n - u$, il s'agit de montrer que $\|v_n\|_{p+1}$ tend vers zéro. D'après le lemme 1.1, en désignant par C diverses constantes indépendantes de n, on a pour tout $R > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\ge R} |v_n(x)|^{p+1} dx &\le \|v_n 1_{[|x|\ge R]}\|_\infty^{p-1}\ \|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\le C\, R^{\frac{-(p-1)(N-1)}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui, en fixant $R > 0$ assez grand, permet d'affirmer que pour tout $n \ge 1$:

$$\|v_n 1_{[|x|\ge R]}\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \le \varepsilon.$$

Par ailleurs comme d'après le théorème de Rellich-Kondrachov **1.**8.16 l'injection de $H^1([|x| < R])$ dans $L^{p+1}([|x| < R])$ est compacte (rappelons que $(N-2)(p+1) < 2N$), on peut fixer $n_0 \ge 1$ assez grand tel que pour $n \ge n_0$ on ait $\|v_n\|_{L^{p+1}([|x|<R])} \le \varepsilon$. Ainsi pour $n \ge n_0$, on a $\|v_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \le 2\varepsilon$, et le théorème est prouvé. □

En utilisant le lemme 1.1, on voit que pour l'anneau

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ ;\ R_1 < |x| < R_2 \right\},$$

l'espace $H^1_{\rm rad}(\Omega)$ est contenu dans $C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$: on en déduit aisément le résultat suivant que nous laissons en exercice.

1.3 Corollaire. *Soient $N \ge 2$ un entier, $0 < R_1 < R_2$ deux réels, l'anneau*

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ ;\ R_1 < |x| < R_2 \right\},$$

et $1 \le q < \infty$. Alors les injections de $H^1_{\rm rad}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ et dans $C(\overline{\Omega})$ sont compactes.

1.4 Exemple. L'ouvert Ω étant, comme dans le corollaire ci-dessus, un anneau et $p > 1$ étant fixé, l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions dans $H_0^1(\Omega)$; de plus ces solutions sont de classe $C^{2,\theta}$ pour $\theta < 1$. □

1.5 Exemple. Soient $N \geq 2$, $m > 0$ un réel et $p > 1$ tel que $(N-2)p < N+2$. Pour résoudre dans $\mathbb{R}^N$ l'équation :

$$-\Delta u + mu = |u|^{p-1}u \tag{1.1}$$

dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, il suffit de minimiser la fonctionnelle

$$J(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v(x)|^2 + m|v(x)|^2\right) dx,$$

sur l'ensemble $S := \left\{v \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \,;\, \|v\|_{p+1} = 1\right\}$. Il est clair que J atteint son minimum sur S, car J est minorée, faiblement séquentiellement s.c.i. ; les suites minimisantes sont nécessairement bornées puisque $m > 0$ et, grâce au théorème 1.2, la fonction $v \mapsto \|v\|_{p+1}$ est faiblement séquentiellement continue sur $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in S$ tels que :

$$J(u_0) = \min_{v \in S} J(v), \qquad -\Delta u_0 + mu_0 = \lambda |u_0|^{p-1}u_0.$$

En multipliant cette équation par u_0, on voit que $\lambda = J(u_0) > 0$ et, en posant $u := \lambda^{1/(p-1)}u_0$, on obtient une solution de (1.1). On notera également que u_0, donc u, peut être supposée positive car $J(|u_0|) = J(u_0)$. En fait comme il est montré par B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg [72, 73] dans un cadre plus général, toute solution positive de (1.1) est radiale décroissante (par rapport à un point donné x_0 de $\mathbb{R}^N$). Par ailleurs M.K. Kwong [91] a montré que *modulo* le choix de ce point x_0 la solution radiale décroissante est unique.

Le lecteur pourra montrer (voir *Exercices*) que J satisfait la condition de Palais-Smale sur S, et qu'elle y possède une infinité de points critiques. □

1.6 Remarque. L'équation (1.1) peut être également résolue par une méthode non variationnelle appelée *méthode du tir*. En supposant que la solution recherchée est radiale, posons $f(r) := u(x)$ pour $r = |x|$; en supposant que u est dérivable en zéro, f satisfait l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} f''(r) + \dfrac{N-1}{r} f'(r) = mf(r) - |f(r)|^{p-1}f(r) & \text{pour } r > 0 \\ f(0) = \alpha \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

On peut alors montrer (voir par exemple H. Berestycki, P.L. Lions & L.A. Peletier [22]) que, pour une valeur bien précise du paramètre α, cette équation admet une solution globale et positive. □

Avant de donner un exemple plus général d'équation semilinéaire pouvant être résolue en utilisant le résultat de compacité du théorème 1.2, nous allons introduire l'identité de Pohožaev satisfaite par les solutions de certaines équations semilinéaires.

2. L'identité de Pohožaev et ses conséquences

Le résultat suivant a été remarqué par S.I. Pohožaev [131] dans le cas particulier où l'ouvert Ω est borné. Ce résultat a des conséquences importantes que nous verrons dans un instant.

2.1 Proposition (Identité de Pohožaev). *Soient Ω un ouvert de classe C^1, g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont on désignera par G la primitive s'annulant en zéro et $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant l'équation*

$$-\Delta u = g(u).$$

Si de plus $G(u) \in L^1(\Omega)$ et $\mathbf{n}(\sigma)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$, alors pour tout $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixé, u satisfait l'identité

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*)\cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma \\ = N\int_\Omega G(u(x))dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En particulier si $\Omega = \mathbb{R}^N$, pour $1 \le j \le N$ on a

$$\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx = \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2 dx,$$
$$(N-2)\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx = 2\int_\Omega G(u(x))dx.$$

Démonstration. Soit une fonction φ_0 de classe C^∞ sur $[0,\infty[$ telle que $\varphi_0(t) = 1$ pour $0 \le t \le 1$, et $\varphi_0(t) = 0$ pour $t \ge 2$. En posant, pour $j \ge 1$ entier,

$$\varphi_j(x) := \varphi_0\left(\frac{|x|}{j}\right),$$

on vérifie facilement que $|\nabla\varphi_j(x)| \le C$, une constante indépendante de j et que :

$$|x||\nabla\varphi_j| \le \frac{|x|}{j}\,|\varphi_0'\,(|x|/j)\,| \le C\,\|\varphi_0'\|_\infty.$$

On peut alors, pour un indice i fixé, multiplier les deux membres de l'équation $-\Delta u = g(u)$ par $(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)$. En intégrant par parties le terme de droite on obtient

$$\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = \int_\Omega (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i G(u(x))dx$$
$$= -\int_\Omega \varphi_j(x)G(u(x))dx$$
$$-\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i\varphi_j(x)G(u(x))dx,$$

et par un passage à la limite où on utilise le théorème de la convergence dominée et le fait que $\partial_i\varphi_j(x)$ tend vers zéro lorsque $j \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_\Omega G(u(x))dx. \tag{2.2}$$

D'autre part, on intègre par parties le terme de gauche de l'équation et on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\cdot((x_i - z_i^*)\partial_i u(x))\varphi_j(x)dx =$$
$$-\int_{\partial\Omega}((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma))\varphi_j(\sigma)\nabla u(\sigma)\cdot\mathbf{n}(\sigma)d\sigma$$
$$+\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx.$$

Or le dernier terme s'écrit :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx = \tag{2.3}$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i\left[|\nabla u(x)|^2\right]dx$$
$$+\int_\Omega |\partial_i u(x)|^2\varphi_j(x)dx$$
$$+\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)dx.$$

En appelant dans l'ordre E_{1j}, E_{2j} et E_{3j} les trois termes de droite dans (2.3), on a, lorsque $j \to \infty$:

$$E_{3j} \to 0, \qquad \text{et} \qquad E_{2j} \to \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx. \tag{2.4}$$

D'autre part, en intégrant par parties, E_{1j} s'écrit :

$$E_{1j} = \frac{-1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\partial_i\left[(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\right]dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\varphi_j(\sigma)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma,$$

et donc lorsque $j \to \infty$, on a

$$E_{1j} \to \frac{-1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma.$$

Finalement en reportant cette dernière limite ainsi que (2.4) dans la relation (2.3), on a grâce à (2.2) :

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad &\frac{-1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\cdot \mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\nabla u(\sigma)\cdot \mathbf{n}(\sigma)d\sigma \\ &\quad = -\int_\Omega G(u(x))dx,\end{aligned}$$

ce qui, en faisant la somme sur i et sachant que lorsque $u = 0$ sur le bord alors le gradient $\nabla u(\sigma)$ est parallèlle à $\mathbf{n}(\sigma)$ (i.e. $\nabla u(\sigma) = (\nabla u(\sigma)\cdot \mathbf{n}(\sigma))\,\mathbf{n}(\sigma)$), conduit à :

$$\begin{aligned}&\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma - z^*)\cdot \mathbf{n}(\sigma)d\sigma \\ &\quad = N\int_\Omega G(u(x))dx.\end{aligned}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors $\partial\Omega = \varnothing$ de sorte que la relation (2.5) et le fait que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$$

impliquent $\|\partial_i u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\partial_1 u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ pour $1 \le i \le N$; cela termine la preuve de la proposition. □

2.2 Remarque. Ici, pour la simplicité de l'exposé nous avons supposé que Δu était dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ pour donner un sens aux termes du type $x_i\partial_i u\Delta u$ ainsi qu'à $\nabla u(\sigma)$ sur le bord $\partial\Omega$. Mais dans un grand nombre de cas, en particulier lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, des hypothèses adéquates de croissance sur g impliquent que si $u \in H^1(\Omega)$ satisfait l'équation $-\Delta u = g(u)$, alors localement $\partial_i u$ est dans un espace L^p_{loc} avec $p > 2$ et Δu est dans $L^{p'}_{\mathrm{loc}}$ (avec $(p-1)p' = p$), de sorte que l'on peut procéder comme dans la démonstration ci-dessus (voir *Exercices* pour de tels exemples). Typiquement, si $|g(s)| \le C\left(|s| + |s|^{\frac{N+2}{N-2}}\right)$, et $N \ge 3$, on peut écrire

$$-\Delta u = Vu,$$

avec $V \in L^\infty(\Omega) + L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Alors le lemme de Brezis-Kato **1.**11.7 implique que $u \in L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$, et on peut donc conclure que u satisfait l'identité de Pohožaev. Dans les exemples que nous traiterons par la suite, on peut toujours vérifier que les solutions que nous considérons satisfont cette identité. □

2.3 Remarque. Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^N$, on peut obtenir l'identité de Pohožaev, connue chez les physiciens sous le nom de *théorème de viriel* [1], par un raisonnement formel simple qui doit être justifié. Cette façon de procéder est surtout utile pour se souvenir des coefficients intervenant dans l'identité, et aussi dans d'autres circonstances où *a priori* on ne voit pas par quoi multiplier l'équation pour obtenir une identité intéressante. Soit en effet

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx. \tag{2.6}$$

Une solution de $-\Delta u = g(u)$, avec $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, est un point critique de E sur cet espace ; en particulier la dérivée de E en u, dans n'importe quelle direction, est nulle. Si pour $\lambda > 0$, on pose $u_\lambda(x) := u(x/\lambda)$ et $f(\lambda) := E(u_\lambda)$ on doit avoir $f'(1) = 0$, pourvu que f soit dérivable au voisinage de $\lambda = 1$. Or de manière claire on a :

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$$
$$f'(1) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx.$$

Ce qu'il faut justifier ici, c'est le fait que u_λ décrit bien une courbe de classe C^1 dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, ce qui peut être fait dans la plupart des cas réellement intéressants, car on peut alors montrer que les solutions de $-\Delta u = g(u)$ ont une décroissance exponentielle à l'infini du type $|u(x)| + |Du(x)| \le C\exp(-\delta|x|)$ pour certaines constantes $C, \delta > 0$ (voir aussi *Exercices*). □

2.4 Remarque. Toujours dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, en multipliant l'équation $-\Delta u = g(u)$ par u on déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)g(u(x))dx,$$

ce qui donne avec l'identité de Pohožaev :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{N-2}{2N}u(x)g(u(x)) - G(u(x))\right) dx = 0. \tag{2.7}$$

Cela implique en particulier que $s \mapsto \frac{N-2}{2N}sg(s) - G(s)$ doit prendre des valeurs positives et négatives, si elle n'est pas identiquement nulle. Par exemple si $g(s) = \lambda|s|^{p-1}s$ avec $p \ge 1$ et $\lambda \ne 0$ on en déduit que, si $N \ge 3$, le seul exposant p pour lequel l'équation $-\Delta u = \lambda|u|^{p-1}u$ peut avoir une solution non nulle dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ est $p = \frac{N+2}{N-2}$, alors que si $N = 2$ l'équation n'a aucune solution non nulle. Il est aussi intéressant de noter que cet argument appliqué à $p := 1$ permet de voir que le laplacien n'a pas de fonction propre sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. Mais pour ce cas particulier, on dispose du résultat suivant de T. Kato [84] :

[1] Dans le cas où $N = 3$, le viriel d'un point matériel situé en M et soumis à une force $\overrightarrow{F}$ est le scalaire $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OM}$, où O est un point arbitraire choisi comme origine.

2.5 Théorème. *Soit $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On suppose que lorsque $|x|$ tend vers l'infini on a $q(x) = o(|x|^{-1})$. Alors, si $\lambda > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ vérifient*

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N),$$

on a $u \equiv 0$.

Dans les *Exercices* on pourra voir d'autres exemples où l'identité de Pohožaev permet de conclure à la non existence de solutions.

On peut montrer (voir en particulier J. Serrin [150] où, lorsque le problème est posé dans une boule, ce résultat est *essentiellement* prouvé, sans être explicitement proclamé, ainsi que B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg [72, 73]) que si $u > 0$ est solution de $-\Delta u = g(u)$ et si g est localement lipschitzienne, alors u est radiale décroissante (si g est supposée seulement continue le résultat ne subsiste plus). Notons aussi que la relation $\|\partial_i u\|_{L^2} = \|\partial_1 u\|_{L^2}$ satisfaite par une solution quelconque, implique que, pour toute direction $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^N$, on a $\|\partial_{\mathbf{e}} u\|_{L^2} = \|\partial_1 u\|_{L^2}$, mais on ne sait pas si toute solution est radiale (ici $\partial_{\mathbf{e}} u := \mathbf{e} \cdot \nabla u$ et $|\mathbf{e}| = 1$). □

2.6 Remarque. Soient Ω un ouvert borné régulier, et $g(s) := |s|^{p-1}s$. L'identité de Pohožaev implique que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ vérifie $-\Delta u = |u|^{p-1}u$, comme on a aussi

$$\int_\Omega [-\Delta u(x)]u(x)dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx,$$

alors :

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma = 0. \tag{2.8}$$

Supposons que l'ouvert Ω est étoilé par rapport à un point z^* de $\mathbb{R}^N$, par exemple (pour simplifier) $z^* := 0$; plus précisément supposons que pour tout $\sigma \in \partial\Omega$, on a $\sigma \cdot \mathbf{n}(\sigma) > 0$. On déduit de (2.8) que si $\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1} > 0$ alors $u \equiv 0$. Si $\frac{N-2}{2} = \frac{N}{p+1}$ alors $\nabla u = 0$ sur $\partial\Omega$, et si de plus $u \geq 0$, alors par le théorème de Green

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \nabla u(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma = \int_\Omega -\Delta u(x) dx = \int_\Omega u(x)^p dx,$$

ce qui implique que $u \equiv 0$: c'est le résultat de S.I. Pohožaev [131] (en fait on peut montrer que même si on ne suppose pas que $u \geq 0$, alors $u \equiv 0$; voir *Exercices*). Nous attirons l'attention sur le fait que le résultat de non-existence de solution non nulle est spécifique au cas où $g(s) = |s|^{p-1}s$, $p = \frac{N+2}{N-2}$ est l'*exposant critique de Sobolev* et Ω est étoilé.

En effet, toujours pour le cas où $g(s) = |s|^{p-1}s$, nous venons de voir que si $\Omega := [R_1 < |x| < R_2]$ est un anneau, alors pour *tout* $p > 1$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions. Cela prouve que la nature géométrique, ou plutôt topologique, de l'ouvert Ω joue un rôle essentiel dans l'existence de solutions pour le problème de Dirichlet que nous considérons ici. Un résultat de A. Bahri & J.M. Coron [13] montre que si Ω est un ouvert régulier et non contractible alors il existe une solution au problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $N = 3$ et $p := \frac{N+2}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev (le résultat général dit que pour $N \geq 3$, s'il existe un entier $d \geq 1$ tel que l'homologie $H_d(\Omega; \mathbb{Z}_2)$ de Ω est non nulle, alors le problème précédent a une solution. On pourra consulter J.R. Munkres [120, chapter 1] pour la définition de $H_d(\Omega; \mathbb{Z}_2)$).

D'autre part comme il a été remarqué par H. Brezis & L. Nirenberg [36] et comme nous le verrons plus loin, il existe $\lambda_* > 0$ tel que si λ_1 désigne la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur l'ouvert borné Ω alors, pour tout $\lambda \in]\lambda_*, \lambda_1[$, le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^p & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

admet une solution (en fait si $N \geq 4$ alors $\lambda_* = 0$). Cela montre que le résultat de Pohožaev que nous avons évoqué plus haut dépend fortement de la forme particulière de la non-linéarité. □

2.7 Remarque. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$ les solutions de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \neq 0, \end{cases}$$

vérifient (pourvu qu'elles soient dans $H^1(\mathbb{R}^N) \cap H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$) :

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.$$

Donc, pour les solutions éventuelles, E étant définie par (2.6), on a

$$E(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

ce qui implique en particulier que, sur l'ensemble des solutions, l'action E est positive. D'où la question suivante : y a-t-il une solution d'action (ou d'énergie) minimale parmi toutes les solutions éventuelles ? Une telle solution est appelée un

état fondamental (*ground state* en anglais). Avant de répondre à cette question et montrer (sous des hypothèses adéquates) qu'une telle solution existe et qu'elle est à symétrie sphérique, nous allons consacrer un paragraphe à la symétrisation de Schwarz.

3. Symétrisation de Schwarz ou réarrangement

Dans tout ce paragraphe, lorsque nous ne le précisons pas, les fonctions considérées sont *positives et mesurables* au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Pour définir le réarrangement ou la symétrisation de Schwarz d'une fonction f de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}_+$, on commence par considérer les fonctions étagées (voir à ce sujet M. Cotlar & R. Cignoli [47, chapter V, § 1.5], ou encore G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Pólya [77, chapter X, § 10.12–10.14]). On désignera par $|\cdot|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$ et par $[|x| < R]$ la boule $B(0,R)$ de $\mathbb{R}^N$ pour cette norme.

3.1 Définition. *Soient $A_1, \dots, A_n$ des boréliens de $\mathbb{R}^N$ deux à deux disjoints de mesure finie, et $0 < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1$ des réels. Si f est une fonction étagée telle que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, alors on définit son réarrangement par*

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i 1_{[R_{i-1} \le |x| < R_i]},$$

où $R_0 := 0$ et $R_i \ge R_{i-1}$ sont donnés par la relation

$$\operatorname{mes}([R_{i-1} \le |x| < R_i]) = \operatorname{mes}(A_i).$$

3.2 Remarque. Soit f une fonction étagée prenant un nombre fini de valeurs $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. Si $A_i := [f = a_i]$, alors $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. On peut aussi écrire

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \tag{3.1}$$

où $f_1 \ge f_2 \ge \cdots \ge f_n$ et les λ_i sont donnés par la relation

$$f_i := 1_{[f \ge a_i]}, \quad \lambda_i := a_i - a_{i+1} \ \text{ pour } \ 1 \le i \le n, \quad a_{n+1} := 0\,.$$

De cette façon le réarrangement de f est donné par

$$f^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^*$$

et on a $f_1^* \ge f_2^* \ge \cdots \ge f_n^*$. En effet il suffit de remarquer que l'on a $(\lambda_i f_i)^* = \lambda_i f_i^* = \lambda_i 1_{[|x| < R_i]}$, où R_i vérifie $\operatorname{mes}(A_i) = \operatorname{mes}([R_{i-1} \le |x| < R_i])$ et :

$$\operatorname{mes}([|x| < R_i]) = \operatorname{mes}([f \ge a_i]) = \operatorname{mes}(A_i) + \cdots + \operatorname{mes}(A_n).$$

Comme $\lambda_i = a_i - a_{i+1}$, on conclut facilement que

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[R_{i-1}\le|x|<R_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{[|x|<R_i]}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)^* .$$

Cela est intéressant dans la mesure où l'application $f \mapsto f^*$ n'est pas linéaire, mais néanmoins dans le cas particulier où f s'écrit sous la forem (3.1) le réarrangement de f est la somme des réarrangements $\lambda_i f_i^*$. □

Le théorème suivant permet de définir le réarrangement d'une fonction positive et mesurable quelconque.

3.3 Théorème & Définition. *Soient $1 \le p \le \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive. Il existe une fonction unique $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $f^* \ge 0$ et pour tout $\lambda > 0$*

$$\mathrm{mes}([f \ge \lambda]) = \mathrm{mes}([f^* \ge \lambda]),$$

et où l'ensemble $[f^* \ge \lambda]$ est une boule $B(0, R_\lambda)$. La fonction f^* est radiale décroissante et on l'appelle le **réarrangement décroissant**, *ou la* **symétrisée de Schwarz** *de la fonction f. De plus pour toute fonction continue et croissante $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $G(0) = 0$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))dx. \tag{3.2}$$

Démonstration. On considère l'application $f \mapsto f^*$ de la définition 3.1. Remarquons qu'alors si f et g sont étagées et $f \le g$ alors $f^* \le g^*$. En effet si a_i, b_j et A_i, B_j sont tels que $0 < a_n < \cdots < a_1$ et $0 < b_m < \cdots < b_1$, les A_i étant deux à deux disjoints, ainsi que les B_j, si

$$f := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \le g := \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j},$$

alors pour tout $i \overset{\ge}{\le} {}^{1}_{n}$ fixé il existe un indice j_i tel que $b_{j_i+1} < a_i \le b_{j_i}$ (on posera $b_{m+1} := 0$). Par ailleurs si

$$f^* := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[R_{i-1}<|x|\le R_i]}, \qquad g^* := \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{[R'_{j-1}<|x|\le R'_j]},$$

et x_0 est tel que $f^*(x_0) = a_i$, on a par définition $R_{i-1} < |x_0| \le R_i$ et

$$\mathrm{mes}\left(B(0, R_i)\right) = \mathrm{mes}\left([f \ge a_i]\right)$$
$$\le \mathrm{mes}\left([g \ge a_i]\right) = \mathrm{mes}\left(B(0, R'_{j_i})\right) .$$

Cela implique que $R_i \le R'_{j_i}$ et par suite $x_0 \in B(0, R'_{j_i})$ et $g^*(x_0) \ge b_{j_i} \ge a_i$, i.e. $f^* \le g^*$. On a aussi (pour une fonction étagée) de façon évidente $\|f\|_p^p = \|f^*\|_p^p$. Si maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $f \ge 0$, il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_n$

telle que $f_n \le f_{n+1} \le f$ et $f_n \to f$ presque partout. Par conséquent d'après ce que nous venons de remarquer, la suite $(f_n^*)_n$ est une suite croissante, et si on désigne par $f^* := \lim_{n\to\infty} f_n^*$, cette limite étant *a priori* à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a d'après le théorème de la convergence monotone

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f_n^*(x)|^p dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n^*(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f^*(x)|^p dx,$$

ce qui implique en particulier que $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent $f^* < \infty$ presque partout. D'autre part les suites d'ensembles

$$[f_n \ge \lambda] \qquad \text{et} \qquad [f_n^* \ge \lambda]$$

étant croissantes, on a

$$[f \ge \lambda] = \bigcup_n [f_n \ge \lambda] \qquad \text{et} \qquad [f^* \ge \lambda] = \bigcup_n [f_n^* \ge \lambda],$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}([f \ge \lambda]) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}([f_n \ge \lambda]) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}([f_n^* \ge \lambda]) \\ &= \operatorname{mes}([f^* \ge \lambda]). \end{aligned}$$

Enfin comme l'ensemble $[f_n^* \ge \lambda]$ est une boule $B(0, R_{n,\lambda})$ et que $R_{n,\lambda} \le R_{n+1,\lambda}$, on voit aussi que l'ensemble $[f^* \ge \lambda]$ est une boule $B(0, R_\lambda)$, où $R_\lambda := \lim_{n\to\infty} R_{\lambda,n}$. L'identité (3.2) étant claire pour chacune des fonctions f_n, f_n^*, on conclut la preuve du théorème en faisant tendre n vers l'infini. □

3.4 Proposition. *Soient $1 \le p, q, r \le \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$ des fonctions positives.*
1) *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)dx \le \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x)dx.$$

2) *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, alors on a l'inégalité de F. Riesz*

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} f(x)g(y)h(x-y)dydx \le \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(y)h^*(x-y)dxdy.$$

Démonstration. Pour montrer **1)**, il suffit de le faire pour des fonctions étagées. Si on a

$$f = a1_A, \qquad g = b1_B,$$

en posant $A^* := B(0, R_1)$ et $B^* := B(0, R_2)$, avec $\operatorname{mes}(A^*) = \operatorname{mes}(A)$ et $\operatorname{mes}(B^*) = \operatorname{mes}(B)$, on a

$$\int fg = \int 1_A 1_B = \int 1_{A\cap B} \leq \min\left(\mathrm{mes}(A), \mathrm{mes}(B)\right)$$
$$= \int 1_{A^*\cap B^*} = \int 1_{A^*} 1_{B^*} = \int f^* g^*,$$

et la propriété est prouvée pour cette situation. Comme nous l'avons vu à la remarque 3.2, si f et g sont deux fonctions étagées, on peut toujours les écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \qquad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j,$$

où les fonctions $f_i = 1_{A_i}$, $g_j = 1_{B_j}$ vérifient

$$0 < f_n \leq \cdots \leq f_1, \qquad \text{et} \qquad 0 < g_m \leq \cdots \leq g_1,$$

de telle sorte que $f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^*$ et $g^* = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j^*$. Ainsi, d'après ce que nous venons de dire :

$$\int fg = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \int f_i g_j \leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \int f_i^* g_j^* = \int f^* g^*.$$

L'inégalité donnée par **2)** est dûe à F. Riesz [141], et on peut en trouver une preuve, très technique, dans G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Pólya [77, chapter X, § 10.14–10.15, theorem 379], dans le cas où $N = 1$. Une démonstration plus simple, ainsi qu'une généralisation de cette inégalité au cas où il y a plus de trois fonctions et $N \geq 1$, a été donnée par H.J. Brascamp, E.H. Lieb & J.M. Luttinger [26], et nous y renvoyons le lecteur. □

3.5 Remarque. Au lieu de prendre les ensembles de $[f^* \geq \lambda]$ comme étant des boules euclidiennes ayant même mesure que $[f \geq \lambda]$, on pourrait les choisir comme les homothétiques d'une boule fixée de $\mathbb{R}^N$ pour une distance autre que la distance euclidienne. Plus précisément, si K_* est un convexe ouvert, symétrique par rapport à l'origine et tel que $0 \in K_*$, en désignant par $K(R)$ le convexe $\{Rx\ ;\ x \in K_*\}$, on peut construire une *symétrisée* f^{*K} de f en disant que pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $[f^{*K} \geq \lambda]$ est une *boule* $K(R_\lambda)$ ayant même mesure que $[f \geq \lambda]$. On peut montrer alors que f^{*K} est déterminée de manière unique, que pour $1 \leq p \leq \infty$ on a $\|f^{*K}\|_p = \|f\|_p$ et que la propriété 1) de la proposition 3.4 est satisfaite. Mais nous ne savons pas si l'analogue de l'inégalité de Riesz est satisfaite, même en remplaçant la convolution de $\mathbb{R}^N$ par une convolution dans un sens approprié pour l'action d'un autre groupe, lorsque K_* est une *boule adaptée* à cette action. □

On déduit aisément de la première propriété donnée par la proposition 3.4 que la symétrisation est une contraction dans le cône des fonctions positives de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

3.6 Corollaire. *Si f, g sont deux fonctions positives de $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors on a :*

$$\|f^* - g^*\| \leq \|f - g\|.$$

Nous allons prouver un lemme sur la caractérisation de l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$ avant de montrer que la symétrisation de Schwarz conserve cet espace (et qu'elle y est même continue lorsque $N = 1$, comme l'a montré J.M. Coron [46], ou qu'elle l'est parfois, lorsque la fonction symétrisée satisfait une certaine condition de *régularité*, comme l'ont prouvé F. Almgren & E.H. Lieb [3]). Dans la suite nous noterons pour $t > 0$

$$G_t(x) := (4\pi t)^{-N/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right),$$

le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$. Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction $u := G_t * u_0$ définie par convolution entre G_t et u_0 vérifie l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{sur } \ ]0, \infty[\times\mathbb{R}^N,$$

et que $u(t, \cdot) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ lorsque $t \to 0$. Tout cela peut se montrer par transformation de Fourier en notant que

$$\left(\widehat{G_t * u_0}\right)(\xi) = \exp(-t|\xi|^2)\widehat{u}_0(\xi),$$

où $\widehat{v}$ désigne la transformée de Fourier de $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a alors le résultat suivant (ici $\|\cdot\|$ et $(\cdot|\cdot)$ désignent la norme et le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^N)$) :

3.7 Lemme. *Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si*

$$\lim_{t\to 0} J_t(v) < \infty, \qquad \text{où } \ J_t(v) := \frac{1}{t}\left(\|v\|^2 - (v|G_t * v)\right).$$

Plus précisément lorsque $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ on a $\|\nabla v\|^2 = \lim_{t\to 0} J_t(v)$.

Démonstration. Rappelons en premier lieu (cf. paragraphe § **1.**8) que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)d\xi < \infty.$$

Or d'après l'identité de Parseval on peut écrire :

$$\begin{aligned} J_t(v) &= \frac{1}{t}\left(\|\widehat{v}\|^2 - (\widehat{v}|\widehat{G_t * v})\right) \\ &= \frac{1}{t}\int |\widehat{v}(\xi)|^2 \left(1 - \exp(-t|\xi|^2)\right) d\xi. \end{aligned}$$

On voit donc que si $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, puisque

$$\frac{1}{t}\left(1 - \exp(-t|\xi|^2)\right) \leq |\xi|^2,$$

par le théorème de la convergence dominée on a $\lim_{t\to 0} J_t(v) < \infty$ et plus précisément

$$\lim_{t\to 0} J_t(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

D'autre part si $v \notin H^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi = +\infty$, et comme

$$\frac{1}{t}\left(1 - \exp(-t|\xi|^2)\right) \geq \frac{|\xi|^2}{1+t|\xi|^2},$$

grâce au théorème de la convergence monotone, on voit que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\xi)|^2 \frac{|\xi|^2}{1+t|\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = +\infty,$$

et par conséquent $\lim_{t\to 0} J_t(v) = +\infty$. □

3.8 Proposition. *Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive. Alors la symétrisée u^* appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Démonstration. Nous suivons ici la démonstration de E.H. Lieb [96]. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$; avec les notations introduites au lemme 3.7, on sait que

$$\|\nabla u\|^2 = \lim_{t\to 0} J_t(u),$$

et pour montrer que $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer que la limite de $J_t(u^*)$ est finie lorsque $t \to 0$. Or d'après l'inégalité de F. Riesz vue à la proposition 3.4 **2)** on a

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} u(x) G_t(x-y) u(y) dxdy \leq \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} u^*(x) G_t^*(x-y) u^*(y) dxdy,$$

mais comme $G_t \equiv G_t^*$, on en déduit que $J_t(u) \geq J_t(u^*)$. On obtient donc facilement le résultat annoncé en faisant tendre t vers zéro, et en utilisant le lemme 3.7. □

3.9 Remarque. Pour $1 \leq p < \infty$ on peut montrer que $\|\nabla u^*\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p}$ (voir par exemple F. Almgren & E.H. Lieb [3]). □

3.10 Remarque. Comme le montre G. Talenti [160], en utilisant les techniques de symétrisation et le calcul des variations on peut voir que, pour $1 \leq p < N$, dans l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C(p,N) \|\nabla u\|_{L^p}$$

l'égalité est réalisée par une fonction radiale et on peut calculer la meilleure constante $C(p,N)$. Dans le cas où $1 < p < N$, cette constante est donnée par

$$C(p,N) := \pi^{-1/2} N^{-1/p} \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{(p-1)/p} \left[\frac{\Gamma(N)\Gamma[(N+2)/2)]}{\Gamma(N/p)\Gamma[(p+pN-N)/p]}\right]^{1/N}$$

et l'inégalité de Sobolev devient une égalité pour les fonctions

$$\varphi(x) := \left(a + b|x|^{p/(p-1)}\right)^{(p-N)/p}, \qquad a, b > 0.$$

Voici une application de ces techniques, pour voir que parmi tous les corps de volume donné, la sphère a la plus petite superficie (ou dans $\mathbb{R}^2$, parmi toutes les *figures* de superficie donnée, le cercle a le plus petit périmètre).

Si Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$, on sait que

$$\mathrm{mes}_N(\Omega) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} 1_\Omega(x)\varphi(x)dx \ ; \ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N),\ |\varphi(x)| \le 1\right\}.$$

Si $N \ge 2$, pour définir $\mathrm{mes}_{N-1}(\partial\Omega)$ la *mesure superficielle à $N-1$ dimension* de $\partial\Omega$ (ou encore le *périmètre* de Ω si $N = 2$), on peut procéder comme suit. Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on définit sa *variation totale* par :

$$\mathrm{VT}(u) := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\nabla\cdot\Phi(x)dx \ ; \ \Phi \in (C_c^1(\mathbb{R}^N))^N,\ |\Phi(x)| \le 1\right\},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. L'ensemble des fonctions à variation totale bornée est désignée par $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^N)$. On vérifie facilement que, par exemple si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $Du \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors :

$$\mathrm{VT}(u) = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Lorsque Ω est un ensemble mesurable, pour définir la mesure superficielle (ou *l'aire*) de $\partial\Omega$, on pose

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}_{N-1}(\partial\Omega) &:= \mathrm{VT}(1_\Omega)\\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} 1_\Omega(x)\nabla\cdot\Phi(x)dx \ ; \ \Phi \in (C_c^1(\mathbb{R}^N))^N,\ |\Phi(x)| \le 1\right\}.\end{aligned}$$

En effet si Ω est un ouvert borné et de classe C^1, en désignant par $\mathbf{n}(\sigma)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$, par une intégration par parties on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}(1_\Omega) &= \sup\left\{\int_\Omega \nabla\cdot\Phi(x)dx \ ; \ \Phi \in (C_c^1(\mathbb{R}^N))^N,\ |\Phi(x)| \le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{\partial\Omega} \Phi(\sigma)\cdot\mathbf{n}(\sigma)d\sigma \ ; \ \Phi \in (C_c^1(\mathbb{R}^N))^N,\ |\Phi(x)| \le 1\right\}\\ &= \int_{\partial\Omega} d\sigma,\end{aligned}$$

et on retrouve ainsi la définition classique de la mesure (superficielle) de $\partial\Omega$.

L'inégalité isopérimétrique

$$[\mathrm{mes}_N(\Omega)]^{(N-1)/N} \leq \frac{[\Gamma((N+2)/2)]^{1/N}}{N\sqrt{\pi}}\,\mathrm{mes}_{N-1}(\partial\Omega)$$

exprime simplement le fait que pour un ensemble mesurable on a

$$\|1_\Omega\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C(1,N)\mathrm{VT}(1_\Omega)\,;$$

et l'égalité est vraie si, et seulement si, Ω est une boule. Cette inégalité peut naturellement s'obtenir de l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C(1,N)\,\|\nabla u\|_{L^1}$$

où, pour trouver la meilleure constante $C(1,N)$, on peut se borner à minimiser $\|\nabla u\|_{L^1}$ sous la contrainte $\|u\|_{L^{N/(N-1)}} = 1$ parmi les fonctions radiales. □

4. Existence d'un état fondammental

Nous reprenons ici l'équation modèle :

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta u = g(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N\,, \\ u \neq 0, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

dont on cherche une solution dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nous avons vu que u est un point critique de la fonctionnelle :

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx,$$

que les solutions *raisonnables* de cette équation satisfont l'identité de Pohožaev

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$$

et qu'un état fondamental est une solution u telle que pour toute autre solution v on ait $E(u) \leq E(v)$. Comme ici

$$E(u) = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx > 0,$$

on va montrer que sous des hypothèses presque optimales on peut trouver une telle solution. Pour en montrer l'existence, on a alors (au moins) deux possibilités :

1) soit minimiser E ou plutôt, ce qui revient au même, la fonction $J(v) := \|\nabla v\|^2$, sous la contrainte de Pohožaev, c'est à dire sur l'ensemble

$$S_P := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}\ ;\ V(v) = 0\right\},$$

où on a posé

$$V(v) := (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx - 2N\int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx,$$

pourvu que $S_{_P}$ soit non vide et contienne la limite de la suite minimisante ;
2) soit minimiser $J(v) := \|\nabla v\|^2$ sur l'ensemble

$$\left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \ ; \ \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx = N-2 \right\}.$$

Dans ce paragraphe nous allons adopter la deuxième méthode et nous renvoyons aux *Exercices* pour étudier la première. Aussi, nous séparons légèrement la question de l'existence d'une solution à (4.1) du problème de minimisation de J sur la contrainte mentionnée.

Nous commençons notre étude par le cas où $N \geq 3$, parce que la preuve de l'existence d'une solution dans le cas $N = 1$ peut être traité par une méthode d'équation différentielle oridinaire (rappelons aussi que le théorème 1.2 n'est valable que pour $N \geq 2$), et enfin le cas $N = 2$ est plus délicat. Soient donc

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} S := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \, ; \, G(v) \in L^1(\mathbb{R}^N), \ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx = 1 \right\}, \\ J(v) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx. \end{cases}$$

Nous introduisons les conditions suivantes sur la fonction G, la primitive de g s'annulant en zéro.

$$\text{(4.3)} \qquad G \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \text{et } \exists s_0 > 0 \quad \text{tel que } \ G(s_0) > 0\,,$$

$$\text{(4.4)} \qquad \exists m > 0, \text{ t.q. } \ G''(0) = -m, \qquad \lim_{|s|\to\infty} |s|^{-2^*} G^+(s) = 0,$$

où $2^* = 2N/(N-2)$ et $G^+ := \max(G, 0)$ est la partie positive de G. Alors on a le résultat suivant.

4.1 Proposition. *Soit $N \geq 3$. On suppose que la fonction G est deux fois dérivable en zéro, vérifie $G(0) = G'(0) = 0$, que les conditions (4.3) et (4.4) sont satisfaites et que S, J sont définies par (4.2). Si de plus on suppose que G est paire, alors la fonctionnelle J atteint son minimum sur S en un point $v \in S$ tel que v est une fonction positive et radiale décroissante.*

Démonstration. Commençons par remarquer que $S \neq \varnothing$ car, $s_0 > 0$ étant comme dans (4.3), en prenant $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\varphi(x) = s_0 \quad \text{si } |x| \leq 1, \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq 1 + \varepsilon,$$

on voit facilement que pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $\int_{\mathbb{R}^N} G(\varphi(x))dx > 0$. Il suffit alors de choisir convenablement $\lambda > 0$ pour que si $\varphi_\lambda(x) := \varphi(x/\lambda)$, on ait

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\varphi_\lambda(x)\right) dx = 1.$$

Notons aussi que si $v \in S$, comme on suppose que G est paire, $|v| \in S$ et $J(|v|) = J(v)$. On peut donc considérer une suite minimisante $(\widetilde{v}_n)_n$ sur S telle que $\widetilde{v}_n \geq 0$ et

$$J(\widetilde{v}_n) \to \alpha := \inf_{v \in S} J(v).$$

Grâce à la proposition 3.8, on sait que si on considère la symétrisée $v_n := (\widetilde{v}_n)^*$, alors $v_n \in S$ et

$$\alpha \leq J(v_n) \leq J(\widetilde{v}_n) \to \alpha = \inf_{v \in S} J(v).$$

Soit $G_0(s) := G(s) + \frac{m}{2}s^2$. Nous allons montrer que :

$$G_0^+(v_n) \to G_0^+(v) \qquad \text{dans} \qquad L^1(\mathbb{R}^N),$$

en montrant tout d'abord que la suite $\left(G_0^+(v_n)\right)_n$ est équi-intégrable. En effet, compte tenu des conditions (4.4), pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe une constante $C := C(\varepsilon_0) > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait

$$G_0^+(s) \leq \varepsilon_0 |s|^2 + C|s|^{2^*}.$$

Mais, de l'inégalité de Sobolev $\|v_n\|_{L^{2^*}} \leq C \|\nabla v_n\|$, on déduit :

$$1 + \frac{m}{2}\|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} G_0^-(v_n(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(v_n(x))dx \leq \varepsilon_0 \|v_n\|^2 + C\|\nabla v_n\|^{2^*}, \tag{4.5}$$

ce qui, en prenant $2\varepsilon_0 < m$, implique que $(v_n)_n$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et, $\|\nabla v_n\|$ étant également bornée, on conclut finalement que $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

De même, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe $\delta, M > 0$ telles que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait

$$\begin{cases} G_0^+(s) \leq \varepsilon_1 s^2 & \text{pour } |s| \leq \delta, \\ G_0^+(s) \leq \varepsilon_1 |s|^{2^*} & \text{pour } |s| \geq M. \end{cases} \tag{4.6}$$

Comme v_n est radiale décroissante, d'après le lemme 1.1 on a

$$|v_n(x)| \leq C|x|^{\frac{-(N-1)}{2}} \|v_n\|_{H^1} \leq C|x|^{\frac{-(N-1)}{2}}.$$

Pour voir que $(G_0^+(v_n))_n$ est équi-intégrable on doit montrer tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1 \qquad \int_{|x| \geq R} G_0^+(v_n(x))dx \leq \varepsilon, \tag{4.7}$$

ce qui est manifestement vrai grâce à la première propriété de (4.6). Ensuite il reste à montrer que $R > 0$ étant fixé comme ci-dessus, la suite $\left(G_0^+(v_n)1_{[|x|<R]}\right)_n$ est équi-intégrable. Or si $A \subset [|x| < R]$ est mesurable, en utilisant l'inégalité de Sobolev et (4.6), pour tout $\varepsilon_1 > 0$ on a

$$\int_A G_0^+(v_n(x))dx \le \varepsilon_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^2 dx + \varepsilon_1 C \, \|\nabla v_n\|^{2^*} + \mathrm{mes}(A) \max_{\delta \le |s| \le M} G_0^+(s).$$

On voit donc (cf. définition **1.**4.12) que pour tout $\varepsilon > 0$, si ε_1 et $\mathrm{mes}(A)$ sont suffisamment petits, on a

$$\int_A G_0^+(v_n(x))dx \le \varepsilon,$$

et finalement cela implique que la suite $\left(G_0^+(v_n)\right)_n$ est équi-intégrable.

Maintenant, moyennant une extraction de sous-suite, on peut supposer que la suite $(v_n)_n$ converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et presque partout sur $\mathbb{R}^N$ vers $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Le théorème de Vitali **1.**4.13 permet alors de conclure que $G_0^+(v_n) \to G_0^+(v)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, et en appliquant le lemme de Fatou dans la relation (4.5) on voit que

$$1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_0^- \left(v(x)\right) dx + \frac{m}{2}\|v\|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}^N} G_0^+ \left(v(x)\right) dx, \tag{4.8}$$

et en particulier on conclut que $G(v) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. D'autre part, J étant faiblement séquentiellement s.c.i. sur $H^1(\mathbb{R}^N)$, on a $J(v) \le \alpha$. Si on montre que $v \in S$, alors on aura $\alpha = J(v)$. Si on avait une inégalité stricte dans (4.8), cela signifierait que $\int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx > 1$; mais alors en posant $v_\lambda(x) := v(x/\lambda)$ pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(v_\lambda(x))dx = \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx,$$

et il existerait $\lambda \in]0,1[$ tel que $\widetilde{v} := v_\lambda$ soit dans S. Cela n'est pas possible car on aurait

$$\alpha \le J(\widetilde{v}) = \lambda^{N-2} J(v) < \alpha.$$

On doit donc avoir $v \in S$, et cela montre que J atteint son minimum sur S. □

4.2 Remarque. Récemment O. Lopes [108] a montré, de manière très simple, qu'en général le point où J atteint son minimum est à symétrie sphérique. Plus précisément, soient F et G des fonctions de classe C^2 (ou même $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$) de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, et

$$S := \left\{ v \in (H_0^1(\Omega))^m \ ; \ F(v) \in L^1(\mathbb{R}^N), \ \int_{\mathbb{R}^N} F(v(x))dx = 1 \right\} \neq \varnothing \,,$$
$$J(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx \,.$$

Si on suppose que $u \in S$ réalise le minimum de J sur S, i.e.

$$J(u) = \inf_{v \in S} J(v) \,,$$

alors u est à symétrie sphérique. Il est intéressant de noter qu'ici F et G ne sont pas nécessairement paires, et que dans le cas où $m \ge 2$ on ne peut pas utiliser

la symétrisation de Schwarz même en supposant que F et G sont paires. Voir aussi la fin de la remarque 2.4 et B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg [72, 73]. □

Nous allons montrer maintenant que la fonction $v \in S$ trouvée dans la proposition précédente conduit, moyennant un changement d'échelle $x \mapsto x/\lambda$, à une solution d'énergie minimale de l'équation (4.1). Dans la suite on posera

$$S_+ := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \; ; \; G(v) \in L^1(\mathbb{R}^N), \; \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx \geq 1 \right\} . \tag{4.9}$$

4.3 Lemme. *Soient $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition 4.1 et $v \in S$ telle que*

$$J(v) = \min_{w \in S} J(w).$$

On suppose de plus que $g(v) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction continue H telles que $H(0) = 0$ et

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \qquad |g(s+t)| \leq C\,|g(s)| + H(t). \tag{4.10}$$

Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $-\Delta v = \lambda g(v)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Notons en premier lieu que

$$\inf_{w \in S_+} J(w) = \min_{w \in S} J(w).$$

En effet comme nous l'avons vu à la fin de la démonstration de la proposition 4.1, si $w \in S_+$ et $w \notin S$, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que, si $w_\lambda(x) := w(x/\lambda)$, on ait $w_\lambda \in S$ et $J(w_\lambda) < J(w)$; par conséquent la borne inférieure de J est atteinte sur S. D'autre part si on avait $g(v) \equiv 0$, comme $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on peut facilement voir par exemple que $\int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur v. Maintenant si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ est tel que

$$\langle g(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(v(x))\varphi(x)dx > 0$$

(on notera que de telles fonctions φ existent), grâce à l'hypothèse (4.10) la fonction $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x) + t\varphi(x))dx$ est dérivable et sa dérivée en $t = 1$ est précisément $\langle g(v), \varphi \rangle$. Alors il existe $t_* > 0$ tel que pour $0 < t < t_*$ on ait $v + t\varphi \in S_+$. Par conséquent

$$J(v) \leq J(v + t\varphi) = J(v) + 2t \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx + t^2 J(v),$$

ce qui, après simplification et division par t, puis en faisant tendre t vers zéro, implique que $\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v(x) \cdot \nabla \varphi(x)dx \geq 0$. Rappelons alors le résultat suivant (voir aussi l'exercice 59 du chapitre 1) :

Lemme. *Soient f, g deux formes linéaires sur un espace de Banach X telles que pour tout $\xi \in X$, $\langle f, \xi\rangle > 0$ implique $\langle g, \xi\rangle \geq 0$. Alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $g = \lambda f$.*

On conclut en utilisant ce lemme qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $-\Delta v = \lambda g(v)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. Si $\lambda = 0$, on aurait $-\Delta v = 0$ et $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, donc $v \equiv 0$, ce qui n'est pas vrai. Par conséquent $\lambda > 0$ et le lemme 4.3 est prouvé. □

4.4 Remarque. L'hypothèse (4.10) limite la croissance de la fonction g : par exemple une fonction qui a une croissance du type $s \mapsto \exp(s^2)$ ne peut pas satisfaire une telle condition, mais une croissance du type $s \mapsto \exp(\alpha|s|)$ ou encore $s \mapsto \alpha|s|^p$, avec $\alpha > 0$ et $p > 1$, est acceptable. On doit supposer une telle condition pour affirmer que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $G(v + \varphi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. En effet, pour le voir il suffit d'écrire

$$G(v(x) + \varphi(x)) = G(v(x)) + g(v(x) + \theta(x)\varphi(x)) \cdot \varphi(x),$$

pour un $\theta(x) \in [0, 1]$. On notera aussi que la condition de croissance donnée dans (4.4), ne porte que sur G^+, la partie positive de G. Cependant la condition (4.10) est suffisamment simple et générale pour que nous ne nous attardions pas ici à donner une condition optimale (voir aussi *Exercices*). □

Avant d'énoncer le théorème concernant la résolution du problème (4.1), nous allons nous intéresser à la régularité et la décroissance à l'infini des solutions qui sont dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

4.5 Proposition. *Soient $N \geq 1$ et $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $g(0) = 0$. On pose $q_0 := \frac{N+2}{N-2}$ lorsque $N \geq 3$, et $q_0 > 1$ quelconque lorsque $N \leq 2$. On suppose que pour des constantes $a, \delta, m > 0$, en posant $g_0(s) := g(s) + ms$, la condition suivante est satisfaite :*

$$\text{(4.11)} \qquad \begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \quad [\operatorname{sgn}(s) g_0(s)]^+ \leq a|s|^{q_0}, \\ \text{pour } |s| \leq \delta, \quad \text{on a} \quad \operatorname{sgn}(s) g_0(s) \leq 0. \end{cases}$$

On suppose que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfait l'équation $-\Delta u = g(u)$ et $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors on a $u \in C_0^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta < 1$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad |u(x)| \leq C \exp\left(-\sqrt{1 + m|x|^2}\right).$$

De plus si g est de classe C^1, alors u est de classe $C^{2,\theta}$ pour tout $\theta < 1$, et pour une constante $C > 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad |Du(x)| \leq C \exp\left(-\sqrt{1 + m|x|^2}\right).$$

Démonstration. Nous commençons par prouver que u est de classe $C^{1,\theta}$ et tend vers zéro à l'infini. Comme $-\Delta u + mu = g_0(u)$, si on montre que pour $p < \infty$ suffisamment grand on a $g_0(u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, le théorème de régularité **1.**11.1 permet de dire que $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ et, cet espace étant contenu dans $C_0^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ d'après l'inégalité de Morrey-Sobolev, le but sera atteint.

Tout d'abord, en utilisant l'inégalité de Kato (voir lemme **1.**8.24 ainsi que l'exercice 30 du chapitre 1), on a dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, en posant $p_0 := 2N/(N+2)$ lorsque $N \geq 3$ et $p_0 > 1$ quelconque lorsque $N \leq 2$:

$$-\Delta|u| + m|u| \leq -\mathrm{sgn}(u)\Delta u + m|u| = \mathrm{sgn}(u)g_0(u) \leq a|u|^{q_0}\,. \tag{4.12}$$

Comme d'après l'inégalité de Sobolev on a $|u|^{q_0} \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$, on sait qu'il existe un unique $w \in W^{2,p_0}(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$-\Delta w + mw = a|u|^{q_0}.$$

Or le principe du maximum (appliqué à l'opérateur $-\Delta + mI$) permet de dire que $|u| \leq w$. Si $2p_0 \geq N$, alors on sait que $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $2 \leq p < \infty$, ce qui implique aussi que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour de tels p. Lorsque $2p_0 < N$, les inégalités de Sobolev (voir proposition **1.**8.10) permettent alors de conclure que si

$$q_1 := \frac{p_0 N}{N - 2p_0} \qquad \text{et} \qquad p_1 := \frac{2Nq_1}{N+2},$$

on a $w \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent $u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$. En reprenant ce procédé on montre que $w \in W^{2,p_1}(\mathbb{R}^N)$ et un argument de *bootstrap* (cf. l'exemple **1.**11.6) conduit finalement à : $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p < \infty$ et w, u sont dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. En utilisant l'inégalité de Morrey-Sobolev on conclut que $u \in C_0^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in]0,1[$, et u et Du tendent vers zéro à l'infini (on voit aussi que si g_0 est de classe $C^{0,\beta}$ pour un $\beta \in]0,1[$, le théorème de régularité de Schauder implique que que u est de classe $C^{2,\theta}$).

Pour montrer la décroissance exponentielle de u à l'infini, considérons :

$$z(x) := \lambda \exp\left(-\sqrt{1+\beta|x|^2}\right), \tag{4.13}$$

pour des constantes $\lambda, \beta > 0$ que nous fixerons dans un instant. Un calcul élémentaire permet de voir que :

$$-\Delta z + mz = \left[\frac{N + (N-1)\beta(1+\beta|x|^2)}{(1+\beta|x|^2)^{3/2}}\,\beta + \frac{m + (m-\beta)\beta|x|^2}{1+\beta|x|^2}\right] z$$

de sorte que

$$-\Delta z + mz \geq \frac{m + (m-\beta)m|x|^2}{1+\beta|x|^2}\, z. \tag{4.14}$$

En prenant maintenant $\beta := m$, comme u est continue et tend vers zéro à l'infini, on en déduit que $\mathrm{sgn}(u(x))g_0(u(x))$ est négatif pour $|x| > R$ assez grand, et ainsi on peut trouver $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on ait

$$\mathrm{sgn}(u(x))g_0(u(x)) \leq \frac{m}{1+m|x|^2}\, z(x) = \frac{m\lambda \exp\left(-\sqrt{1+m|x|^2}\right)}{1+m|x|^2}.$$

On en conclut, en utilisant (4.12) et (4.14) que l'on a

$$-\Delta|u| + m|u| \leq -\Delta z + mz,$$

et le principe du maximum implique que $|u| \leq z$.

Pour montrer la décroissance exponentielle de Du, en posant $v := \partial_i u$ pour un indice i fixé, on remarque que v satisfait

$$-\Delta v + mv = g_0'(u)v$$

et de nouveau par l'inégalité de Kato et du fait que $g_0'(u(x)) \leq 0$ pour $|x| \geq R$ assez grand, on peut trouver $\lambda > 0$ pour que

$$-\Delta|v| + m|v| \leq g_0'(u)|v| \leq m(1 + m|x|^2)^{-1} z \leq -\Delta z + mz,$$

ce qui donne encore, par le principe du maximum

$$|v(x)| \leq \lambda \exp\left(-\sqrt{1 + m|x|^2}\right). \qquad \square$$

4.6 Remarque. En fait on constate dans la démonstration ci-dessus que si g est de classe $C^{0,\alpha}_{\text{loc}}$, on peut conclure que u est de classe $C^{2,\alpha}$. On notera également que le résultat énoncé est vrai indépendamment du fait que u est radiale ou non. Cependant, lorsque l'on considère une solution radiale, on peut montrer facilement qu'en dehors de l'origine u est de classe C^2 et si $f(r) := u(x)$ pour $r = |x|$, en zéro on a $f''(0) = -g(u(0))/N$: par conséquent lorsque g est continue, les solutions radiales sont de classe C^2 (voir *Exercices*). Par ailleurs dans ce cas, un simple raisonnement sur l'équation différentielle ordinaire satisfaite par f, à savoir

$$-f'' - \frac{N-1}{r} f' + mf = g_0(f),$$

permet de conclure que si u, ou f, est à décroissance exponentielle à l'infini, il en est de même de f' et f''. $\square$

Nous vérifions dans le lemme suivant que la minimisation de J sur S fournit bien un état fondamental de (4.1).

4.7 Lemme. *Soient S et J définies par (4.2), $N \geq 3$ et $S \neq \varnothing$. On suppose que $v \in S$ vérifie :*

$$J(v) = \min_{w \in S} J(w), \quad \exists \lambda > 0 \ \text{ tel que } \ -\Delta v = \lambda g(v),$$

et que v satisfait l'identité de Pohožaev. En posant $u(x) := v(\lambda^{-1/2}x)$, pour $x \in \mathbb{R}^N$, alors u est solution de (4.1) et pour toute autre solution $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de cette équation satisfaisant l'identité de Pohožaev on a $E(u) \leq E(w)$.

Démonstration. Remarquons en premier lieu que d'après l'identité de Pohožaev, pour toute fonction $z \in S$ telle que

$$g(z) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad -\Delta z = \mu g(z),$$

on a $2^*\mu = J(z)$. Par conséquent, on a en particulier $\lambda \leq \mu$. Soit maintenant $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution quelconque de (4.1) satisfaisant l'identité de Pohožaev.

En posant $b := \int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx$, de cette identité on déduit $2^* b = J(w) > 0$, et en notant $z(x) := w(b^{1/N}x)$, on vérifie que

$$-\Delta z = b^{2/N} g(z), \qquad z \in S.$$

En particulier, si on note $a := \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$, on déduit que $-\Delta v = a^{2/N} g(v)$, et d'après ce que nous venons de dire on doit avoir $a \leq b$. Mais, toujours d'après l'identité de Pohožaev, on a

$$E(u) = \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx = \frac{2a}{N-2}$$
$$\leq \frac{2b}{N-2} = \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} G(w(x))dx = E(w),$$

ce qui montre le résultat du lemme. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant la résolution de (4.1), sans toutefois chercher à donner les conditions les plus générales sur la fonction g.

4.8 Théorème. *Soit $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction impaire telle que $|g(s)| \leq C\,(|s| + |s|^{q_0})$ où $q_0 := \frac{N+2}{N-2}$. On désigne par G la primitive de g s'annulant en zéro, et on suppose que les conditions (4.3) et (4.4) sont satisfaites. Alors l'équation (4.1) admet une solution positive $u \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$, qui est un état fondamental, de calsse C^2 et à décroissance exponentielle à l'infini.*

Démonstration. Sous les hypothèses que nous avons ici, celles de la proposition 4.1 et du lemme 4.3 sont satisfaites : par conséquent, on sait qu'il existe $\lambda > 0$ et v dans $S \cap H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ tels que $-\Delta v = \lambda g(v)$ et $J(v) = \min_{w\in S} J(w)$. En posant alors

$$u(x) := v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

on vérifie que u est solution de (4.1). La proposition 4.5 montre alors que u est de classe C^2 et à décroissance exponentielle à l'infini. Enfin u est un état fondamental, car d'après l'hypothèse de croissance sur g, toute solution $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de l'équation (4.1) vérifie les conditions du lemme 4.7, et ce lemme prouve que $E(u) \leq E(w)$. □

4.9 Remarque. Pour voir que les conditions imposées à g ne sont pas loin d'être optimales, remarquons en premier lieu que pour l'existence d'une solution, il faut que G prenne une valeur strictement positive. Par ailleurs, la condition de croissance sous-critique est presque nécessaire en ce sens que l'équation

$$-\Delta u + mu = |u|^{p-1}u,$$

n'admet pas de solution pour $m > 0$ et $(N-2)p \geq N+2$. Reste à montrer que la première condition de (4.4) est presque nécessaire en ce sens que si $G''(0) = g'(0) = m > 0$, l'équation (4.1) n'a pas de solution radiale dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$. En

effet si $u \not\equiv 0$ est une telle solution, alors u tend vers zéro à l'infini au moins comme $|x|^{-(N-1)/2}$. Or en posant $g_0(s) := g(s) - ms$, on voit que la fonction

$$q(x) := -\frac{g_0(u(x))}{u(x)}$$

est, grâce au lemme 1.1, un $o(|x|^{-1})$ lorsque $|x| \to \infty$ et $N \geq 3$. Cela contredit le théorème de Kato 2.5 qui dit que

$$-\Delta u + q(x)u = mu$$

n'a pas de solution dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ autre que la solution nulle.

On peut aussi montrer ce résultat sans utiliser le théorème 2.5 mais en analysant l'équation différentielle ordinaire que satisfait $\varphi(r) := u(x)$ pour $r = |x|$; voir *Exercices* pour le cas général. Cependant dans le cas de la dimension $N = 2$ voici un résultat plus précis.

4.10 Lemme. *Soient $N := 2$, g une fonction continue et G sa primitive s'annulant en zéro. On suppose qu'il existe des réels $\mu > 0$ et $\delta > 0$ tels que $0 \leq G(s) \leq \mu s^2$ si $0 < |s| \leq \delta$. Alors (4.1) n'a pas de solution dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration. En effet si u était une telle solution, en posant $\varphi(r) := u(x)$ pour $r = |x|$, on aurait :

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + g(\varphi) = 0.$$

En multipliant cette équation par φ' et en intégrant de r à ∞ on obtient

$$\frac{-1}{2}|\varphi'(r)|^2 + \int_r^\infty |\varphi'(s)|^2 \frac{ds}{s} - G(\varphi(r)) = 0.$$

En posant alors $F(r) := \int_r^\infty |\varphi'(s)|^2 s^{-1} ds$, sachant par le lemme 1.1 que $|\varphi(r)| \leq \delta$ pour $r \geq r_0$ et un certain r_0 assez grand, on a donc pour $r \geq r_0$:

$$\frac{1}{2r}\left(r^2 F(r)\right)' = \frac{1}{2} r F'(r) + F(r) \geq 0.$$

Cela implique que $r^2 F(r) \geq r_0^2 F(r_0) =: c_0 > 0$. Mais alors

$$r|\varphi'(r)|^2 + 2rG(\varphi(r)) = rF(r) \geq \frac{c_0}{r},$$

ce qui, en intégrant sur $[r_0, \infty[$, permet de voir que

$$\int_{r_0}^\infty \left(|\varphi'(r)|^2 + 2\mu|\varphi(r)|^2\right) r dr \geq \int_{r_0}^\infty \left(|\varphi'(r)|^2 + 2G(\varphi(r))\right) r dr = \infty,$$

et par conséquent u n'est pas dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2)$. □

5. Le cas de la dimension deux

Il y a deux difficultés pour traiter le cas de la dimension $N = 2$. Tout d'abord il faut chercher la solution du problème de minimisation sur l'ensemble

$$S := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} \ ; \ G(v) \in L^1(\mathbb{R}^N), \ \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x)) = 0 \right\}, \tag{5.1}$$

et par conséquent il faut s'assurer que la suite qui minimise $J(v) := \|\nabla v\|^2$ sur S, ne converge pas vers zéro. Mais il y a une difficulté supplémentaire, car non seulement J et S sont invariants par les translations de $\mathbb{R}^2$ (i.e. $J\left(v(\cdot + z)\right) = J(v)$) mais de plus, pour tout $\lambda > 0$ et $v \in S$ on a, en posant $v_\lambda(x) := v(\lambda^{-1}x)$,

$$v_\lambda \in S \qquad \text{et} \qquad J(v_\lambda) = J(v).$$

En réalité, mettant à profit cette deuxième invariance on peut surmonter la première difficulté et montrer que J atteint son mimimum sur S, du moins dans le cas où G satisfait des conditions raisonnables (voir H. Berestycki, Th. Gallouët & O. Kavian [20]).

De manière générale, comme nous le verrons par la suite, lorsqu'une fonctionnelle et la contrainte sur laquelle on veut la minimiser sont invariantes sous l'action d'un groupe non compact, en faisant agir ce groupe de manière adéquate sur une suite minimisante, on peut (dans la plupart des cas) s'arranger pour obtenir une nouvelle suite minimisante et relativement compacte.

5.1 Théorème. *On suppose que G vérife la condition (4.3), est deux fois dérivable en zéro, $G'(0) = 0$ et $G''(0) = -m < 0$ et que pour tout $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{|s|\to\infty} \exp\left[-\alpha|s|^2\right] G(s) = 0.$$

Si de plus on suppose que G est paire, alors J atteint son minimum sur S défini par (5.1), en un point $v \in S$ tel que v est une fonction positive et radiale décroissante.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'on a seulement besoin de savoir que pour une suite minimisante on évite la convergence faible vers zéro. Si $(\widetilde{z}_n)_n$ est une suite minimisante sur S, du fait que G est paire, on voit qu'il en est de même de la suite des valeurs absolues $(z_n)_n := (|\widetilde{z}_n|)_n$. De plus en considérant la suite des symétrisées $(z_n^*)_n$, on dispose d'une suite minimisante de fonctions radiales décroissantes et positives. Il est clair qu'en prenant $\lambda_n > 0$ de manière adéquate, et en posant

$$v_n(x) := z_n^*\left(\frac{x}{\lambda_n}\right),$$

on peut s'arranger pour que $\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^2 dx = 1$, et on aura toujours

$$v_n \in S, \qquad J(v_n) = J(z_n^*) \to \inf_{u\in S} J(u),$$

et de plus, en notant $g_0(s) := g(s) + ms$ et par G_0 sa primitive, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(v_n(x))dx = \frac{m}{2} + \int_{\mathbb{R}^N} G_0^-(v_n(x))dx. \tag{5.2}$$

On commence par montrer, en utilisant le théorème de Vitali et l'inégalité de Trudinger-Moser que $G_0^+(v_n)$ tend vers $G_0^+(v)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, du moins pour une sous-suite.

En effet pour tout $\varepsilon > 0$ donné, comme la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, d'après le lemme 1.1 on peut fixer $R > 0$ assez grand pour que

$$\int_{[|x|\geq R]} G_0^+(v_n(x))dx \leq \varepsilon.$$

Notons ensuite que pour tous $\varepsilon_0, \sigma > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\begin{cases} G_0^+(s) \leq \varepsilon_0 |s|^2 & \text{pour } \ |s| \leq \delta_0\,, \\ G_0^+(s) \leq \varepsilon_0 \exp\left[\sigma |s|^2\right] & \text{pour } \ |s| \geq M. \end{cases}$$

D'autre part, si $A \subset B(0,R) =: B_R$ est un ensemble mesurable, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_A G_0^+(v_n(x))dx \leq \varepsilon_0 \int_{B_R} |v_n(x)|^2 dx \\ + \varepsilon_0 \int_{B_R} \exp\left[\sigma |v_n(x)|^2\right] dx \\ + |A| \max_{\delta_0 \leq |s| \leq M} G_0^+(s). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Or d'après l'inégalité de Trudinger-Moser on sait que pour tout $R > 0$ il existe des constantes $C_0 > 0$ et $\sigma_0 > 0$ telles que

$$\|\varphi\|_{H^1(B_R)} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{B_R} \exp\left[\sigma_0 |\varphi(x)|^2\right] \leq C_0\,.$$

En supposant qu'ici $\|v_n\|_{H^1} \leq C_1$ et en prenant $\sigma := \sigma_0 / C_1^2$, dans l'inégalité (5.3), on voit que pour une constante C indépendante de n, ε_0 on a

$$\int_A G_0^+(v_n(x))dx \leq \varepsilon_0 C + |A| \max_{\delta_0 \leq |s| \leq M} G_0^+(s),$$

et donc la suite $(G_0^+(v_n))_n$ est équi-intégrable (voir la définition **1.**4.12). Comme (modulo une extraction de sous-suite) $v_n \to v$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$ et $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible, en utilisant le fait que $G_0^+(v_n)$ converge vers $G_0^+(v)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (théorème de Vitali) et en appliquant le lemme de Fatou à (5.2), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(v(x))dx \geq \frac{m}{2} + \int_{\mathbb{R}^N} G_0^-(v(x))dx > 0,$$

ce qui confirme que $v \not\equiv 0$ et $J(v) \leq \inf_{u \in S} J(u)$. Il reste à montrer que $v \in S$. Or, du fait de l'hypothèse de croissance sur G, la proposition **1.**17.3 implique que la fonction

$$\tau \mapsto f(\tau) := \int_{\mathbb{R}^N} G_0(\tau v(x))dx,$$

est continue sur $[0,1]$. Si on avait $v \notin S$, comme $f(0) = 0$ et $f(1) > m/2$, il existerait $\tau_0 \in]0,1[$ tel que $f(\tau_0) = m/2$, et $v_0 := \tau_0 v \in S$. Cela n'est pas possible car

$$0 < J(v_0) = \tau_0^2 J(v) < \inf_{u\in S} J(u).$$

On doit donc avoir $v \in S$ et le théorème est prouvé. □

5.2 Remarque. Ici nous n'avons pas cherché à donner les meilleures conditions sur G pour prouver l'existence d'un point de minimum de J sur S. En particulier la condition de croissance sur G peut être allégée et imposée uniquement à G_0^+.

Nous verrons par la suite que sous des conditions adéquates sur la fonction g, on peut montrer que la fonction v trouvée dans le théorème précédent conduit, moyennant un changement d'échelle, à un état fondamental de l'équation $-\Delta u = g(u)$. Par exemple (cf. *Exercices*) si on suppose que pour tout $\alpha > 0$ on a

$$|g(s)| \le C(\alpha)\left(|s| + \exp\left[\alpha|s|^2\right]\right),$$

alors le point de minimum v vérifie $-\Delta v = \lambda g(v)$ pour un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda < 0$ est impossible d'après le lemme 4.10 et que $\lambda = 0$ impliquerait $v \equiv 0$, on doit avoir $\lambda > 0$. Par conséquent, si

$$u(x) := v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

on a $-\Delta u = g(u)$. Si $w \in H^1(\mathbb{R}^2)\setminus\{0\}$ est une autre solution, on a naturellement $G(w) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g(w) \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$. De sorte que w satisfait l'identité de Pohožaev et $w \in S$. En particulier $J(u) = J(v) \le J(w)$ et comme $2E(w) = J(w)$, on voit que $E(u) \le E(w)$ et donc que u est un état fondamental de l'équation $-\Delta w = g(w)$.

On notera également que la démonstration vue plus haut montre qu'en fait chercher les points critiques de J sur S revient à les chercher sur l'ensemble

$$\Sigma := \left\{ u \in H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^2)\ ;\ \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx = 0 \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)dx = 1. \right\}.$$

Et de fait comme il a été prouvé dans [20], on peut montrer que J possède une infinité de points critiques sur $\Sigma \cap H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^2)$.

L'idée de minimiser une fonctionnelle invariante par changement d'échelle peut être utilisée pour montrer l'existence d'un état fondamental pour les équations de champ même dans le cas $N \ge 3$, ou encore dans des domaines cylindriques du type $\omega\times\mathbb{R}^{N-k}$ où ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$, avec $0 \le k \le N-2$ (voir plus loin et O. Kavian [86]). □

6. Le lemme de Lieb

Dans certains cas on ne peut pas montrer *a priori* que le minimum de la fonctionnelle que l'on étudie est réalisé par une fonction radiale. On peut alors utiliser le lemme de E.H. Lieb [97] que nous allons montrer dans un instant. Auparavant voici un lemme technique, que nous énonçons dans le cas particulier des espaces H^1, mais que le lecteur pourra facilement traduire dans le cadre des espaces $W^{m,p}$. On note toujours $\|\cdot\|$ la norme de L^2.

6.1 Lemme. *Soit $N \geq 1$. Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $u \not\equiv 0$ et $\|\nabla u\| \leq 1$ il existe $y^0 \in \mathbb{R}^N$ tel que :*

$$\left(2 + \|u\|^{-2}\right) \operatorname{mes}\left[B(y^0) \cap \operatorname{supp}(u)\right] \geq C_0,$$

où $B(y) := \prod_{i=1}^N]y_i - \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2}[$ pour $y \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. Tout d'abord, notons que sous les hypothèses sur u il existe $y^0 \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 1_{B(y^0)}(x)dx < \left(1 + \|u\|^{-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 1_{B(y^0)}(x)dx.$$

En effet sinon on pourrait recouvrir $\mathbb{R}^N$ par des cubes $B(y^n)$ disjoints et en faisant la somme sur n on obtiendrait :

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \left(1 + \|u\|^{-2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx > 1.$$

Ensuite supposons que $N \geq 3$ (le cas $N = 2$ ou $N = 1$ est analogue et on le laisse en exercice). Si $2^* = \frac{2N}{N-2}$, par l'inégalité de Sobolev on a :

$$\begin{aligned} C_0 \|u 1_{B(y^0)}\|_{L^{2^*}}^2 &\leq \int_{B(y^0)} \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right) dx \\ &\leq \left(2 + \|u\|^{-2}\right) \int_{B(y^0)} |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Or en appliquant l'inégalité de Hölder on voit que :

$$\|u 1_{B(y^0)}\|^2 \leq \|u 1_{B(y^0)}\|_{L^{2^*}}^2 \left[\operatorname{mes}\left(B(y^0) \cap \operatorname{supp}(u)\right)\right]^{1 - \frac{2}{2^*}},$$

d'où on déduit le résultat du lemme. □

6.2 Lemme (E.H. Lieb). *Soit $(u_n)_n$ une suite de $H^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|\nabla u_n\| \leq R$. On suppose qu'il existe $\varepsilon, \delta > 0$ tels que :*

$$\forall n \geq 1, \quad \operatorname{mes}\left([|u_n| > \varepsilon]\right) \geq \delta\,. \tag{6.1}$$

Alors il existe une suite $(y^n)_n$ de $\mathbb{R}^N$ telle que si $v_n(x) := u_n(x + y^n)$, aucune sous-suite de $(v_n)_n$ ne converge faiblement vers zéro.

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $\|\nabla u_n\| \leq 1$. En appliquant le lemme 6.1 à la fonction

$$\Big(|u_n| - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^+ ,$$

et en notant que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\Big(|u_n(x)| - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^+\right|^2 dx &\geq \int_{|u_n|>\varepsilon} \left|\Big(|u_n(x)| - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^+\right|^2 dx \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{4}\mathrm{mes}\,[|u_n| > \varepsilon] \geq \frac{1}{4}\delta\varepsilon^2,\end{aligned}$$

on voit qu'ainsi $\| \big(|u_n(x)| - \frac{\varepsilon}{2}\big)^+ \|^{-2} \leq 4\delta^{-1}\varepsilon^{-2}$ et donc

$$\big(2 + 4\delta^{-1}\varepsilon^{-2}\big)\,\mathrm{mes}\left(B(y^n) \cap \mathrm{supp}\left(|u_n| - \frac{\varepsilon}{2}\right)^+\right) \geq C_0.$$

Comme $\mathrm{supp}\,\big(|u_n| - \frac{\varepsilon}{2}\big)^+ = [|u_n| > \varepsilon/2]$, on conclut que

$$\mathrm{mes}\left(B(y^n) \cap \left[|u_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \geq C(\delta,\varepsilon) > 0,$$

où $C(\varepsilon,\delta) := \delta\varepsilon^2/(4 + 2\delta\varepsilon^2)$ est indépendante de n. En particulier si $v_n(x) := u_n(x + y^n)$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned}\int_{B(0)} |v_n(x)|^2 dx &\geq \int_{B(y^n)\cap[|u_n|>\varepsilon/2]} |u_n(z)|^2 dz \\ &\geq \frac{1}{4}\varepsilon^2 C(\delta,\varepsilon) > 0\ ,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(v_n)_n$ ne contient aucune sous-suite convergeant faiblement vers zéro dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

7. Une application du lemme de Lieb

Pour illustrer le lemme de Lieb, nous allons l'appliquer à une variante du problème de minimisation que nous avons étudié aux paragraphes précédents, mais cette fois sans utiliser la compacité des fonctions radiales (voir H. Brezis & E.H. Lieb [34] et O. Kavian [86]). Dans un premier temps soient $N \geq 3$ et $m \geq 1$ des entiers. On pose

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} F(u) := G(u) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=3}^{N} |\partial_i u|^2, \\ S_0 := \left\{ u\ ;\ F(u) \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)(x)dx \geq 0 \right\}, \\ S_+ := S_0 \cap \big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^m \setminus \{0\}, \\ J(u) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\partial_1 u(x)|^2 + |\partial_2 u(x)|^2\big)\, dx. \end{cases}$$

On rappelle que les solutions de $-\Delta u = g(u)$ qui vérifient l'identité de Pohožaev sont dans S_+ ; plus précisément elles satisfont

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)(x)dx = 0.$$

En particulier on a $2E(u) = J(u)$, et la minimisation de J sur S_+ fournit bien un état fondamental de l'équation $-\Delta u = g(u)$.

On suppose que G satisfait les conditions suivantes :

$$G \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \qquad G(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$\limsup_{|s|\to\infty} |s|^{-2^*} G^+(s) = 0, \tag{7.3}$$

$$\exists a_0 > 0,\ \exists \delta_0 > 0 \ \text{ tels que } \ G(s) \le \frac{-a_0}{2}|s|^2 \ \text{ si } |s| \le \delta_0. \tag{7.4}$$

$$\exists s_0 \in \mathbb{R}^m, \quad G(s_0) > 0. \tag{7.5}$$

7.1 Théorème. *Soient $N \ge 3$ et G satisfaisant (7.2)–(7.5) et $g = G'$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $s \in \mathbb{R}^m$ on ait $|g(s)| \le C(|s| + |s|^{\frac{N+2}{N-2}})$ et que pour tout $\delta > 0$ il existe une fonction continue H avec $H(0) = 0$ telle que pour $s, t \in \mathbb{R}^m$ on ait*

$$|G(s+t) - G(s)| \le \delta \left(|G(s)| + |s|^{2^*} \right) + H(t). \tag{7.6}$$

Alors J et S_+ étant définis par (7.1), J atteint son minimum sur S_+ en un point u tel que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)(x)dx = 0$. De plus il existe $\lambda > 0$ tel que si

$$\widetilde{u}(x) := u\left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}}, x_3, \dots, x_N \right),$$

on a $-\Delta\widetilde{u} = g(\widetilde{u})$ et $\widetilde{u}$ est un état fondamental de cette équation.

Démonstration. La condition (7.5) implique que $S_+ \neq \varnothing$. Soient $\alpha := \inf_{v\in S_+} J(v)$ et $(\widehat{v}_n)_n \subset S_+$ une suite minimisante. On peut fixer $\lambda_n > 0$ tel que si

$$v_n(x) := \widehat{v}_n(\lambda_n x_1, \lambda_n x_2, x_3, \dots, x_N),$$

on ait $a_0\|v_n\|^2 + \sum_{i=3}^N \|\partial_i v_n\|^2 = 2$. Comme $v_n \in S_+$ et $J(v_n) = J(\widehat{v}_n)$, on dispose d'une suite minimisante $(v_n)_n$ qui est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Nous allons montrer dans un premier temps que la suite $(v_n)_n$ est *loin* de zéro. En effet pour tout $\delta > 0$ il existe $t > 0$ tel que $G^+(s) \le \delta|s|^{2^*}$ pour $|s| \ge t$. On en déduit

$$\begin{aligned} 1 \le \int_{\mathbb{R}^N} G^+(v_n(x))dx \le & \frac{-a_0}{2} \int_{[|v_n|\le\delta_0]} |v_n(x)|^2 dx \\ & + \int_{[\delta_0<|v_n|<t]} G^+(v_n(x))dx \\ & + \delta \int_{[|v_n|\ge t]} |v_n(x)|^{2^*} dx, \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant l'inégalité de Sobolev, montre que pour une constante C dépendant uniquement de N on a :

$$1 \leq \max_{\delta_0 \leq |s| \leq t} G^+(s)\, \mathrm{mes}\,([|v_n| \geq \delta_0]) + \delta C \|\nabla v_n\|^{2^*}.$$

En prenant finalement $\delta > 0$ assez petit pour que $\delta C \|\nabla v_n\|^{2^*} \leq 1/2$, on voit que

$$\mathrm{mes}\,([|v_n| \geq \delta_0])\ \max_{\delta_0 \leq |s| \leq t} G^+(s) \geq \frac{1}{2}.$$

On peut appliquer maintenant le lemme de Lieb 6.2 pour conclure qu'il existe une suite y^n de $\mathbb{R}^N$ telle que si

$$u_n(x) := v_n(x + y^n),$$

alors $(u_n)_n$ ne contient pas de sous-suite convergeant vers zéro dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible. Moyennant une extraction de suite, $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible et pour tout $q < 2^*$

$$\begin{cases} 0 < J(u) \leq \alpha, \\ u_n \to u \ \text{ dans } \ L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ et p.p.} \end{cases}$$

Vérifions tout d'abord que $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a, pour $\delta, \varepsilon > 0$ fixés comme plus haut :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(u_n(x)) + \frac{a_0}{2}|u_n(x)|^2 \Big)^+ dx \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2*} dx + \max_{\delta_0 \leq |s| \leq R} \Big(G(s) + \frac{a_0}{2}|s|^2 \Big)^+ \mathrm{mes}\,([|u_n| > \varepsilon])\,.$$

Or $\mathrm{mes}\,([|u_n| > \varepsilon]) \leq \varepsilon^{-2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2^*} dx \leq C$; par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(u_n(x)) + \frac{a_0}{2}|u_n(x)|^2 \Big)^+ dx \leq C$$

et le lemme de Fatou implique que $\big(G(u) + \frac{a_0}{2}|u|^2\big)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs de façon claire :

$$1 + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(u_n(x)) + \frac{a_0}{2}|u_n(x)|^2 \Big)^- dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(u_n(x)) + \frac{a_0}{2}|u_n(x)|^2 \Big)^+ dx,$$

et de nouveau le lemme de Fatou montre que $\big(G(u) + \frac{a_0}{2}|u|^2\big)^-$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, et finalement $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

On notera ici que si on savait que la suite $\big(G(u_n) + \frac{a_0}{2}|u_n|^2\big)^+$ est équi-intégrable, on pourrait conclure que $u \in S$, et alors la preuve du théorème serait finie (c'est cette information que nous fournissait la lemme 1.1, lorsqu'on se contentait de travailler avec les fonctions radiales). Mais du fait qu'ici on ne sait

rien du comportement à l'infini des fonctions u_n, on ne peut pas dire que la suite $\left(G(u_n) + \frac{a_0}{2}|u_n|^2\right)^+$ est *équi-négligeable* à l'infini.

Pour montrer que $u \in S$ on va montrer le lemme suivant, qui est un cas particulier des relations de Kuhn-Tucker ; voir *Exercice 2* du chapitre 3. On posera

$$V(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(u)(x)dx, \quad V'(u) := g(u) + \sum_{i=3}^{N} \partial_{ii} u. \tag{7.7}$$

et on notera $\nabla_1 \psi := (\partial_1 \psi, \partial_2 \psi)$, pour une fonction $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

7.2 Lemme. *Soit V définie par (7.7). Alors pour $\varphi \in (\mathscr{D}(\mathbb{R}^N))^m$ on a :*

$$\langle V'(u), \varphi \rangle > 0 \implies \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_1 u(x) \cdot \nabla_1 \varphi(x) dx \geq 0.$$

En particulier il existe $\lambda > 0$ tel que : $-(\partial_{11} + \partial_{22})\, u = \lambda V'(u)$.

En admettant un instant ce lemme, nous pouvons conclure que $u \in S$ et $J(u) = \alpha$, le minimum de J sur S. En effet compte tenu du fait que $\lambda > 0$, on vérifie facilement que si on pose

$$\widetilde{u}(x) := u\left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x_2}{\sqrt{\lambda}}, x_3, \ldots, x_N\right),$$

alors on a $-\Delta \widetilde{u} = g(\widetilde{u})$, et l'hypothèse de croissance sur g permet d'affirmer que $\widetilde{u}$ satisfait l'identité de Pohožaev et en particulier $V(\widetilde{u}) = 0$. Comme on a $V(u) = V(\widetilde{u})$, et sachant que $J(u) \leq \alpha$, on conclut que $u \in S_+$, et $J(u) = \alpha$. Par la même occasion on note que $\widetilde{u}$ est un état fondamental de l'équation $-\Delta v = g(v)$. □

Il nous reste à montrer le lemme 7.2.

Démonstration du lemme 7.2. On notera d'abord que grâce à l'hypothèse de croissance sur g, la fonctionnelle V est de classe C^1 sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et que sa dérivée est précisément V' donnée par (7.7). Ensuite notons que $V'(u) \neq 0$ (car $u \not\equiv 0$, voir aussi *Exercices*), et que par conséquent il existe $\varphi \in (\mathscr{D}(\mathbb{R}^N))^m$ telle que $\langle V'(u), \varphi \rangle > 0$. Pour une telle fonction φ fixée, il existe $t_* > 0$ tel que pour $t \in]0, t_*[$ on ait

$$V(u + t\varphi) - V(u) > 0.$$

Soit $t \in]0, t_*[$ fixé. Si on montre qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad V(u_n + t\varphi) - V(u_n) \geq 0, \tag{7.8}$$

alors le lemme est prouvé. En effet si cette propriété est établie, pour $n \geq n_0$ on a $u_n + t\varphi \in S_+$ et

$$J(u) \leq \alpha \leq J(u_n + t\varphi) = J(u_n) + 2t \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_1 \varphi(x) \cdot \nabla_1 u_n(x) dx + t^2 J(\varphi).$$

Ce qui, en faisant tendre n vers l'infini et utilisant le fait que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible, implique que

$$2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_1\varphi(x)\cdot\nabla_1 u(x)dx + tJ(\varphi) \geq 0.$$

Maintenant, en faisant tendre t vers zéro, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_1\varphi(x)\cdot\nabla_1 u(x)dx \geq 0,$$

et l'argument que nous avons évoqué à la fin de la démonstration du lemme 4.3 permet de conclure que $-(\partial_{11}+\partial_{22})\,u = \lambda V'(u)$ pour un $\lambda \geq 0$. Or $\lambda = 0$ impliquerait $u \equiv 0$, contrairement à ce que nous savons de u. On a ainsi $\lambda > 0$ et le lemme 7.2 est prouvé.

Reste donc à montrer (7.8) ; pour ce faire on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty} V(u_n + t\varphi) - V(u_n) = V(u + t\varphi) - V(u).$$

Or si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B := B(0,R)$ pour un $R > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} V(u_n + t\varphi) - V(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(u_n(x) + t\varphi(x)) - F(u_n(x))\right] dx \\ &= \int_B \left[F(u_n(x) + t\varphi(x)) - F(u_n(x))\right] dx. \end{aligned}$$

Du fait de la stucture de F et puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible, on doit essentiellement vérifier que

$$z_n := G(u_n + t\varphi) - G(u_n),$$

tend vers $z := G(u + t\varphi) - G(u)$ dans $L^1(B)$. On sait déjà que $z_n \to z$ presque partout et que $|G(u_n)|$ est bornée dans L^1. Montrons l'équi-intégrabilité de la suite $(z_n)_n$. D'après l'hypothèse (7.6) sur G on peut écrire, pour tout ensemble mesurable $A \subset B$,

$$\int_A |z_n(x)|dx \leq \delta \int_A \left(|G(u_n(x))| + |u_n(x)|^{2^*}\right) dx + \int_A H(t\varphi(x))dx.$$

Comme $G(u_n)$ et $|u_n|^{2^*}$ sont bornées dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, en prenant d'abord $\delta > 0$ petit, puis $\mathrm{mes}(A)$ petite, on conclut que $(z_n)_n$ est équi-intégrable. Enfin le théorème de Vitali permet de dire que $z_n \to z$ dans $L^1(B)$ et la propriété (7.8) est prouvée. □

7.3 Remarque. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et établir un résultat analogue dans le cas où $N = 2$: en effet la seule chose qui change est que l'on peut autoriser une croissance exponentielle à g.

De même si $\omega \subset \mathbb{R}^k$ est un ouvert borné et $\Omega := \mathbb{R}^{N-k} \times \omega$ avec $N - k \geq 2$, on peut traiter le problème de l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation

$$-\sum_{i=1}^{\ell-1}\partial_{ii}u-\sum_{i,j=\ell}^{N}\partial_i(a_{ij}(y)\partial_j u)=g(y,u),$$

où $\ell := N-k+1$, $y\in\omega$ et $(a_{ij})_{\ell\le i,j\le N}$ est une matrice symétrique et coercive. Voir *Exercices* pour l'étude d'une telle équation. □

7.4 Remarque. On aura noté que dans le théorème 7.1 on ne suppose pas que G est paire, et que dans le cas de l'équation scalaire où $m=1$, on ne dit rien du signe de u, contrairement à l'étude précédente utilisant les fonctions radiales. On rappelle aussi que la solution u est à décroissance exponentielle à l'infini, c'est à dire que la proposition 4.5 est valable pour la solution donnée par le théorème 7.1, en supposant toutefois que g satisfait la condition (4.11) (dans le cas où $m\ge 2$, pour $s\in\mathbb{R}^m$, on note $\operatorname{sgn}(s):=0$ si $s=0$ et $\operatorname{sgn}(s):=s/|s|$ sinon). Enfin la condition de croissance imposée à g dans le théorème 7.1 peut être allégée. □

8. La méthode de concentration-compacité

Cette méthode introduite par P.L. Lions [103–106] est basée sur le lemme suivant, et c'est la méthode la plus générale pour traiter les problèmes de minimisation qui interviennent dans les domaines les plus variés (Équations aux Dérivées Partielles, Analyse Harmonique, Calcul des Variations, etc.). Nous commençons par montrer le premier lemme de concentration-compacité de P.L. Lions, puis nous introduirons *le principe de concentration-compacité*.

8.1 Lemme de concentration-compacité. *Soit $\lambda>0$ fixé. On considère une suite de fonctions positives $(\rho_n)_n$ telle que pour tout $n\ge 1$*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n(x)dx=\lambda.$$

Il existe alors une sous-suite $(\rho_{n_i})_i$ telle qu'une seule des trois possibilités suivantes se présente.

1) *Compacité : il existe une suite $(y^i)_i$ de $\mathbb{R}^N$ telle que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $R<\infty$ vérifiant*

$$\forall i\ge 1,\qquad \int_{B(y^i,R)}\rho_{n_i}(x)dx\ge\lambda-\varepsilon.$$

2) *Évanescence : pour tout $R<\infty$ fixé on a*

$$\lim_{i\to\infty}\left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B(y,R)}\rho_{n_i}(x)dx\right]=0.$$

3) *Dichotomie : il existe $\alpha\in]0,\lambda[$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, il existe des fonctions positives $\rho_{1,i},\rho_{2,i}\in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $i_0\ge 1$ tels que pour tout $i\ge i_0$ on ait :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_{n_i}(x) - [\rho_{1,i}(x) + \rho_{2,i}(x)]|\, dx \le \varepsilon,$$
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1,i}(x)dx - \alpha\Big| \le \varepsilon, \quad \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{2,i}(x)dx - (\lambda - \alpha)\Big| \le \varepsilon,$$
$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}(\rho_{1,i}), \operatorname{supp}(\rho_{2,i})\right) = +\infty.$$

Démonstration. Pour toute fonction positive ρ de $L^1(\mathbb{R}^N)$ on définit sa fonction de concentration de P. Lévy par :

$$Q(t) := \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,t)} \rho(x)dx. \tag{8.1}$$

Q est une fonction croissante bornée : on a $Q(0) = 0$ et $Q(\infty) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx$. On notera Q_n la fonction de concentration associée à ρ_n. Rappelons le lemme suivant (dont on peut trouver une démonstration élémentaire dans les *Exercices*) :

> **Lemme.** *Soient λ, T des réels positifs et finis et $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes de $[0,T]$ dans $[0,\lambda]$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_i})_i$ et une fonction croissante f de $[0,T]$ dans $[0,\lambda]$ telles que $f_{n_i}(t) \to f(t)$, sauf pour une infinité dénombrable de $t \in [0,T]$.*

En utilisant ce lemme, on conclut que $(Q_n)_n$ contient une sous-suite $(Q_{n_i})_i$ convergeant p.p. vers Q, et on a naturellement :

$$Q(0) = 0, \qquad \alpha := Q(\infty) = \lim_{t\uparrow\infty} Q(t) \in [0,\lambda]. \tag{8.2}$$

Si $Q(\infty) = \alpha = 0$, alors la propriété **2)** est vérifiée. De même si $\alpha = \lambda$, alors c'est la propriété **1)** qui est satisfaite. En effet soit $\mu \ge \frac{\lambda}{2}$ et $\mu < \lambda$. Il existe $R := R(\mu)$ tel que pour tout $i \ge 1$, on ait $Q_{n_i}(R) > \mu$. Comme

$$Q_{n_i}(R) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} \rho_{n_i}(x)dx,$$

il existe $y^i(\mu)$ tel que

$$\int_{B(y^i(\mu),R)} \rho_{n_i}(x)dx > \mu.$$

En posant $\widetilde{y}^i := y^i(\lambda/2)$ et $\widetilde{R} := R(\lambda/2)$, on constate que pour tous $\mu > \frac{\lambda}{2}$ (avec $\mu < \lambda$) et $i \ge 1$ on a

$$|\widetilde{y}^i - y^i(\mu)| \le \widetilde{R} + R(\mu).$$

(Car sinon on aurait $B(\widetilde{y}^i, \widetilde{R}) \cap B(y^i(\mu), R(\mu)) = \varnothing$ et cela conduirait à

$$\int_{B(\widetilde{y}^i,\widetilde{R})} \rho_{n_i}(x)dx + \int_{B(y^i(\mu),R(\mu))} \rho_{n_i}(x)dx > \frac{\lambda}{2} + \mu > \lambda$$

qui contredit l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_i}(x)dx = \lambda$). On voit donc qu'en posant $R_0(\mu) := 2R(\mu) + \widetilde{R}$, pour $\frac{\lambda}{2} < \mu < \lambda$ on a

$$\int_{B(\widetilde{y^i},R_0(\mu))} \rho_{n_i}(x)dx > \mu,$$

ce qui montre la propriété **1)**.

Enfin si $\alpha \in]0,\lambda[$, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut prendre $R > 0$ tel que $Q(R) > \alpha - \frac{1}{4}\varepsilon$, et alors il existe $i_0 \geq 1$ tel que pour tout $i \geq i_0$ on ait

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < Q_{n_i}(R) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}.$$

On peut également trouver $y^i \in \mathbb{R}^N$ tel que pour $i \geq i_0$ on ait :

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < \int_{B(y^i,R)} \rho_{n_i}(x)dx < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors si $\rho_{1,i} := \rho_{n_i} 1_{B(y^i,R)}$, on a de façon claire :

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1,i}(x)dx - \alpha\Big| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par ailleurs il existe $R_i > R$ tel que lorsque $i \to \infty$ on ait $R_i \to +\infty$ et $Q_{n_i}(R_i) \to \alpha$. En posant $\rho_{2,i} := \rho_{n_i} 1_{B(y^i,R_i)^c}$, on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left[\rho_{n_i}(x) - (\rho_{1,i}(x) + \rho_{2,i}(x))\right] dx &= \int_{[R\leq|x-y^i|<R_i]} \rho_{n_i}(x)dx \\ &\leq Q_{n_i}(R_i) - Q_{n_i}(R) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalement comme $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\rho_{1,i}), \operatorname{supp}(\rho_{2,i})) \to +\infty$, et que

$$\alpha - \varepsilon < \int_{B(y^i,R_i)} \rho_{n_i}(x)dx < \alpha + \varepsilon,$$

on conclut que les conditions données par la propriété **3)** sont satisfaites et le lemme est prouvé. □

8.2 Remarque. On notera que les conclusions du lemme 8.1 sont valides si on suppose que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = \lambda_n,$$

où $\lambda_n \to \lambda > 0$: en effet il suffit d'appliquer le lemme à la suite ρ_n/λ_n. De même lors de la construction des suites $\rho_{1,i}$ et $\rho_{2,i}$, on peut remarquer qu'il est possible de remplacer $1_{B(y^i,R)}$ et $1_{B(y^i,R_i)^c}$ par des fonctions de troncature de classe C^∞. Plus précisément si $\zeta_i, \eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ vérifient

$$\begin{aligned}&0 \leq \zeta_i \leq 1, \quad \zeta_i = 1 \ \text{ sur } \ B(y^i,R), \quad \zeta_i = 0 \ \text{ sur } \ B(y^i,R+\delta_i)^c, \\ &0 \leq \eta_i \leq 1, \quad \eta_i = 0 \ \text{ sur } \ B(y^i,R_i-\delta_i), \quad \eta_i = 1 \ \text{ sur } \ B(y^i,R_i)^c,\end{aligned}$$

alors on peut fixer $\delta_i > 0$ assez petit pour que $\widetilde{\rho}_{1,i} := \rho_{n_i}\zeta_i$ et $\widetilde{\rho}_{2,i} := \rho_{n_i}\eta_i$ remplissent les conditions de la propriété **3)**. Comme nous le verrons par la suite,

l'intérêt de ces nouvelles fonctions réside dans le fait que $\widetilde{\rho}_{1,i}$ et $\widetilde{\rho}_{2,i}$ conservent la même *régularité* que ρ_{n_i} (par exemple si les ρ_{n_i} sont dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, il en est de même de $\widetilde{\rho}_{j,i}$ pour $j = 1, 2$). □

8.3 Remarque. Un examen rapide de la preuve du lemme 8.1 montre que lorsque l'on traite des problèmes variationnels dans des espaces sur lequels d'autres groupes que celui des translations agissent, il faut changer légèrement la définition de la fonction de concentration $Q(R)$, en prenant par exemple d'autres ouverts $B(y, R)$ qui recouvrent l'espace où l'on travaille. Cela est particulièrement vrai pour les problèmes de minimisation venant de l'Analyse Harmonique où l'espace sous-jacent est un groupe de Lie non compact ou non commutatif. □

Pour utiliser le lemme de concentration-compacité et montrer par exemple que les suites minimisantes sont relativement compactes, en général on procède en montrant que la suite reste *loin* de zéro dans un sens approprié (cela pour éviter le cas 2 du lemme qui correspond à l'évanescence) et que la *masse totale* des éléments de la suite n'a pas intérêt à se scinder en deux pour réaliser le minimum.

En ce qui concerne le cas de l'évanescence, on dispose du lemme suivant de P.L. Lions qui est à comparer avec le lemme de Lieb 6.2.

8.4 Lemme. *Soient $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ et $N \geq 1$ un entier. Lorsque $N > p$, on suppose de plus que $q \neq p^*$. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^q(\mathbb{R}^N)$ telle que $(|\nabla u_n|)_n$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$; s'il existe $R > 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^q dx \right] = 0,$$

alors u_n tend vers zéro dans $L^r(\mathbb{R}^N)$ si $\min(q, p^*) < r < \max(q, p^*)$ (on convient que $p^* = \infty$ si $p \geq N$).

Démonstration. Dans un premier temps supposons que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que $N > p$. Alors il est clair que pour $m > \min(q, p^*)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^m dx \right] = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on voit que si $(\alpha-1)p' > \min(q, p^*)$ et $\alpha > q$ (ici $p'(p-1) = p$), alors

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^{\alpha-1} |\nabla u_n(x)| dx \right] = 0,$$

et en posant $z_n := |u_n|^\alpha$, et utilisant l'inégalité de Sobolev, on sait que pour $\beta > 1$ et $(N-1)\beta < N$ on a

$$\int_{B(y,R)} |z_n(x)|^\beta dx \le C \left[\int_{B(y,R)} (|z_n(x)| + |\nabla z_n(x)|)\, dx \right]^\beta ,$$
$$\le C\varepsilon_n^{\beta-1} \int_{B(y,R)} (|z_n(x)| + |\nabla z_n(x)|)\, dx.$$

où $\varepsilon_n := \int_{B(y,R)} (|z_n(x)| + |\nabla z_n(x)|)\, dx$ tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$. En supposant que les $B(y,R)$ sont des cubes $\prod_{i=1}^N]y_i - \frac{R}{2}, y_i + \frac{R}{2}[$, et en recouvrant $\mathbb{R}^N$ par une suite disjointe de cubes $B(y^j, R)$ on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n(x)|^\beta dx \le C\varepsilon_n^{\beta-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|z_n(x)| + |\nabla z_n(x)|)\, dx \le C\varepsilon_n^{\beta-1}.$$

On conclut que u_n tend vers zéro dans $L^r(\mathbb{R}^N)$, si $\alpha\beta = r$, et le lemme est prouvé dans le cas où on sait que $(u_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Pour le cas général, on voit sans peine que si $t > 0$, la suite

$$v_n := \min(|u_n|, t),$$

satisfait les hypothèses précédentes, et par conséquent $\|v_n\|_r \to 0$ si $\min(q, p^*) < r < \max(q, p^*)$. Or pour $\gamma > r$ et compris entre q et p^*, on sait que $(u_n)_n$ est bornée dans $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$, et en écrivant

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^r dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^r dx + \int_{[|u_n|>t]} |u_n(x)|^r dx$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^r dx + t^{r-\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^\gamma dx,$$

en faisant tendre n puis t vers l'infini et en prenant la lim sup dans cette inégalité, on conclut que $\|u_n\|_r$ tend vers zéro. □

Pour ce qui est de la question de dichotomie, nous allons expliquer de façon heuristique ce qu'il faut faire. Considérons le problème de minimisation

$$\inf \{J(v)\ ;\ v \in X,\ F(v) = 1\}, \tag{8.3}$$

où X est un espace de Banach de fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$, et A, B étant des opérateurs de X dans d'autres espaces fonctionnels Y, Z, on suppose que

$$J(v) := \int_{\mathbb{R}^N} j(x, Av(x))dx, \qquad F(v) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x, Bv(x))dx,$$

et $j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifient $j(x,0) = f(x,0) = 0$ et $j(x,y) \to j^\infty(y)$ et $f(x,z) \to f^\infty(z)$ lorsque $|x| \to \infty$ et $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$ sont fixés. On définit deux nouvelles *fonctionnelles à l'infini* J^∞ et F^∞ comme plus haut en remplaçant j et f par j^∞ et f^∞ respectivement. Puis pour $\lambda > 0$ on associe au problème (8.3) les deux problèmes de minimisation

$$I_\lambda := \inf \{J(v)\ ;\ v \in X,\ F(v) = \lambda\},$$
$$I_\lambda^\infty := \inf \{J^\infty(v)\ ;\ v \in X,\ F^\infty(v) = \lambda\}.$$

On suppose que les ensembles où on cherche la borne inférieure sont non vides et que les fonctions u telles que $F(u) = \lambda$ peuvent être approchées par des fonctions à support compact vérifiant la même contrainte. De plus pour $0 < \lambda \leq 1$ on admet que $I_\lambda > -\infty$, et on suppose (ou on pose) $I_0 = 0$.

On remarque tout d'abord que l'on a toujours l'inégalité large

$$\forall \alpha \in [0, \lambda[, \qquad I_\lambda \leq I_\alpha + I^\infty_{\lambda-\alpha}. \tag{8.4}$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir u_ε et v_ε à support compact tels que $F(u_\varepsilon) = \alpha$, $F(v_\varepsilon) = \lambda - \alpha$ et

$$I_\alpha \leq J(u_\varepsilon) \leq I_\alpha + \varepsilon, \qquad I^\infty_{\lambda-\alpha} \leq J^\infty(v_\varepsilon) \leq I^\infty_{\lambda-\alpha} + \varepsilon.$$

Alors si $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$, $|\mathbf{e}| = 1$ et $v_{n,\varepsilon}(x) := v_\varepsilon(x + n\mathbf{e})$, on peut voir, du fait que les supports u_ε et $v_{n,\varepsilon}$ sont disjoints pour n assez grand, que l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J(u_\varepsilon + v_{n,\varepsilon}) &= J(u_\varepsilon) + J^\infty(v_\varepsilon), \\ \lim_{n\to\infty} F(u_\varepsilon + v_{n,\varepsilon}) &= F(u_\varepsilon) + F^\infty(v_\varepsilon) = \lambda, \end{aligned}$$

où on utilise le fait que J^∞ et F^∞ sont invariantes par les translations de $\mathbb{R}^N$. Finalement on conclut que pour $n \geq n_0$ assez grand on a

$$I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} - \varepsilon \leq J(u_\varepsilon + v_{n,\varepsilon}) \leq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} + 3\varepsilon$$

et en prenant w_n (à support compact) assez proche de $u_\varepsilon + v_{n,\varepsilon}$ tel que $F(w_n) = \lambda$ et $|J(w_n) - J(u_\varepsilon + v_{n,\varepsilon})| \leq \varepsilon$, on voit que comme $I_\lambda \leq J(w_n)$, on a l'inégalité (8.4). En réalité l'argument que nous venons d'utiliser montre aussi que si on a $I_\lambda = I_\alpha + I^\infty_{\lambda-\alpha}$ pour un $\alpha \in]0, \lambda[$, alors les suites minimisantes ne sont pas relativement compactes : en effet on peut vérifier facilement que $\int_{\mathbb{R}^N} w_n(x)\varphi(x)dx \to 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\lim_{n\to\infty} J(w_n) = I_\alpha + I^\infty_{\lambda-\alpha} = I_\lambda \ ,$$

alors que la suite $(w_n)_n$ ne contient aucune sous-suite convergeant dans l'ensemble des contraintes $\{u \in X \ ; \ F(u) = \lambda\}$.

Lorsque les fonctions F et J sont invariantes sous l'action des translations de $\mathbb{R}^N$, on a $I^\infty_{\lambda-\alpha} = I_{\lambda-\alpha}$, et tout ce que l'on peut espérer est que les suites minimisantes soient relativement compactes *modulo* une suite de translations.

On peut ainsi énoncer un *principe de concentration-compacité* disant que les conditions

$$\forall \alpha \in [0, \lambda[, \qquad I_\lambda < I_\alpha + I^\infty_{\lambda-\alpha}, \tag{8.5}$$

$$\forall \alpha \in]0, \lambda[, \qquad I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \tag{8.6}$$

empêchent les suites minimisantes de se diviser en deux *morceaux*, ce qui évite le cas 3) du lemme 8.1. Au paragraphe suivant nous verrons, en appliquant cette méthode au problème de minimisation que nous avons déjà étudié, que les conditions (8.5) ou (8.6) sont suffisantes pour que toute suite minimisante soit

relativement compacte (dans le cas où c'est la condition (8.6) qui est satisfaite, ce sera une compacité *modulo* les translations).

8.5 Exemple. Pour voir concrètement la démarche à suivre, considérons pour $\lambda > 0$:

$$S_\lambda := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p+1} dx = \lambda \right\},$$

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right) dx,$$

pour $N \geq 1$ et $(N-2)p < (N+2)$ (avec $p > 1$). Alors si

$$I_\lambda := \inf_{v \in S_\lambda} J(v),$$

on voit facilement que $I_\lambda = \lambda^{\frac{2}{p+1}} I_1$. Notons d'abord que $I_1 > 0$, et par conséquent $I_\lambda > 0$ pour tout $\lambda > 0$. En effet si on avait $I_1 = 0$, pour une suite $(u_n)_n$ de S_1 telle que $J(u_n) \to I_1 = 0$, on aurait en particulier $\|u_n\|_{p+1} \to 0$, ce qui contredit la contrainte $u_n \in S_1$.

Ensuite remarquons que, si $0 < \alpha < \lambda$ et, par exemple, $\alpha \geq \lambda - \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{2}{p+1}} < \frac{\lambda}{\alpha} \alpha^{\frac{2}{p+1}} &= \alpha^{\frac{2}{p+1}} + \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} \alpha^{\frac{2}{p+1}} \\ &< \alpha^{\frac{2}{p+1}} + \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} (\lambda - \alpha)^{\frac{2}{p+1}}, \end{aligned}$$

ce qui montre (puisque $I_1 > 0$) l'inégalité stricte

$$I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda - \alpha} \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < \lambda \, ; \tag{8.7}$$

cette inégalité empêche l'apparition de *dichotomie* dans les suites minimisantes et on peut montrer qu'elles sont relativement compactes *modulo* des translations.

En effet, en appliquant le lemme 8.1 à $\rho_n := |u_n|^{p+1}$ où $(u_n)_n$ est une suite de S_λ telle que $J(u_n) \to I_\lambda$, comme $I_\lambda > 0$, on peut dire que pour tout $R > 0$ la suite

$$Q_n(R) := \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^{p+1} dx$$

ne tend pas vers zéro. En effet sinon pour un $R > 0$ on aurait (en utilisant l'inégalité de Hölder)

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^q dx \right] = 0,$$

pour tout $q < p + 1$, et par conséquent, $(u_n)_n$ étant bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, le lemme 8.4 impliquerait $\|u_n\|_{p+1} \to 0$, ce qui contredirait la contrainte $u_n \in S_\lambda$. On en conclut que l'évanescence, i.e. le cas 2) du lemme de concentration-compacité 8.1, ne se présente pas pour la suite ρ_n.

De même nous allons vérifier qu'il n'y a pas de dichotomie. En effet dans le cas présent, en supposant que $Q_n(R) \to Q(R)$, que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible et que $u_n \to u$ dans $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ et p.p. (avec $(N-2)q < 2N$), on peut vérifier que le cas 3) du lemme 8.1 se traduit par l'existence d'un $\alpha \in]0, \lambda[$ tel que $Q(\infty) =: \alpha \in]0, \lambda[$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé assez petit, en prenant $R_0 > 0$ tel que $Q(R_0) \geq \alpha - \varepsilon$, il existe $y^n \in \mathbb{R}^N$ et une suite $R_n \to \infty$ tels que

$$\alpha - 2\varepsilon \leq \int_{B(y^n, R_0)} |u_n(x)|^{p+1} dx \leq \alpha + \varepsilon, \quad \text{et} \quad Q_n(R_n) \leq \alpha + \varepsilon.$$

Soit maintenant $\varphi_* \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction décroissante avec $0 \leq \varphi_* \leq 1$, $\varphi_*(t) = 1$ pour $t \leq 1$, $\varphi_*(t) = 0$ si $t \geq 2$ et $|\varphi_*'(t)| \leq 2$. Introduisons les fonctions $\varphi(x) := \varphi_*(|x|)$ et

$$\varphi_n(x) := \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_*}\right), \qquad \zeta_n(x) := 1 - \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_n}\right),$$

puis $u_{1,n} := \varphi_n u_n$, et $u_{2,n} := \zeta_n u_n$; $R_* > \max(R_0, 1)$ sera fixé assez grand pour que pour tout $n \geq 1$ on ait $4R_*^{-1}\|u_n\|_{H^1} \leq \varepsilon$. On peut alors vérifier sans difficulté que pour tout n tel que $R_n \geq R_*$ on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)^2 |\nabla u_n(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_n u_n)(x)|^2 dx \right| \leq \varepsilon$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \zeta_n(x)^2 |\nabla u_n(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\zeta_n u_n)(x)|^2 dx \right| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs comme $\varphi_n + \zeta_n \leq 1_{B(y^n, 2R_*)} + 1_{B(y^n, R_n)^c}$, on voit que

$$J(u_n) \geq J(u_{1,n}) + J(u_{2,n}) - 2\varepsilon.$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_*}\right) |u_n(x)|^{p+1} dx \leq Q_n(2R_*) \leq \alpha + \varepsilon,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_n}\right) |u_n(x)|^{p+1} dx \geq \int_{B(y^n, R_n)} |u_n(x)|^{p+1} dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

ce qui permet enfin de vérifier l'inégalité

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{1,n} - u_{2,n}\|_{p+1}^{p+1} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\varphi\left(\frac{x - y^n}{R_*}\right) - \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_n}\right)\right] |u_n(x)|^{p+1} dx \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\left| \|u_{1,n}\|_{p+1}^{p+1} - \alpha \right| \leq \varepsilon$ et $\left| \|u_{2,n}\|_{p+1}^{p+1} - (\lambda - \alpha) \right| \leq \varepsilon$, on en conclut, en prenant $v_{1,n} \in S_\alpha$ et $v_{2,n} \in S_{\lambda-\alpha}$ telles que $\|u_{i,n} - v_{i,n}\|_{H^1}^2 \leq \delta$ (avec $i = 1, 2$), que pour n assez grand et $\delta > 0$ assez petit on a :

$$J(u_n) \geq J(v_{1,n}) + J(v_{2,n}) - 4\varepsilon \geq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} - 4\varepsilon,$$

ce qui conduit à $I_\lambda \geq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}$, contrairement à l'inégalité (8.7).

Finalement la seule possibilité pour $\rho_n = |u_n|^{p+1}$ est de satisfaire la condition 1) du lemme 8.1, c'est à dire qu'il existe une sous-suite (notée encore) $(u_n)_n$ et une suite de points $y^n \in \mathbb{R}^N$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ vérifiant pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{B(y^n,R)} |u_n(x)|^{p+1} dx \geq \lambda - \varepsilon.$$

En posant $v_n(x) := u_n(x + y^n)$, et en supposant que $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible, p.p. sur $\mathbb{R}^N$ et dans $L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \geq 1$ tel que $(N-2)q < 2N$, on vérifie sans peine que $v \in S_\lambda$ et $J(v) \leq I_\lambda$, donc que $J(v) = I_\lambda$. Cet argument montre en même temps qu'en réalité $v_n \to v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-fort et que toute suite minimisante est relativement compacte, *modulo* une suite de translations de $\mathbb{R}^N$. □

8.6 Remarque. Il est utile de noter que dans l'exemple ci-dessus on ne suppose pas que la suite minimisante possède une quelconque symétrie, ni qu'elle est positive. Nous attirons également l'attention sur le fait qu'ici $N \geq 1$ est quelconque, et que pour $N = 1$, on ne peut pas utiliser les fonctions à *symétrie radiale* pour minimiser J sur S_λ.

Enfin on aura remarqué que si $p = 1$, alors $I_\lambda = I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}$, et *aucune* suite minimisante n'est relativement compacte. □

Le second lemme de concentration-compacité concerne le cas limite des injections de Sobolev dans le cas des espaces $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et $L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)$ (voir pour la démonstration P.L. Lions [105, lemma I.1]). Plus précisément pour $1 \leq p < \infty$ on note $\mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\varphi \mapsto \|D^m\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$; cet espace est muni de la norme $\|D^m u\|_p$. L'inégalité de Sobolev implique en particulier que si $N > mp$, alors $\mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)$ où $p^{*m} := \frac{Np}{N-mp}$. On notera

$$S(m,p,N) := \inf\left\{\|D^m u\|_p^p \,;\; u \in \mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_{p^{*m}} = 1\right\} > 0.$$

L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω étant noté $\mathcal{M}(\Omega)$, nous dirons qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n$ tend faiblement vers μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$, si :

$$\forall \varphi \in C_c(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi d\mu_n = \int_\Omega \varphi d\mu = \langle \mu, \varphi\rangle.$$

On écrira alors $\mu_n \rightharpoonup \mu$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$-faible (on dit aussi que la suite $(\mu_n)_n$ *converge vaguement* vers μ). De même on dira qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n$ de $\mathcal{M}(\Omega)$ *converge étroitement* vers μ (et on écrira $\mu_n \rightharpoonup \mu$ étroitement) si :

$$\forall \varphi \in C_b(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi d\mu_n = \int_\Omega \varphi d\mu = \langle \mu, \varphi\rangle.$$

8.7 Second Lemme de Concentration-compacité. *Soient un entier $m \geq 1$, un réel $1 \leq p < \frac{N}{m}$; on note $p^{*m} := \frac{Np}{N-mp}$ et $\theta := 1 - \frac{mp}{N}$. On suppose que la*

suite $(u_n)_n$ de $\mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ converge faiblement vers $u \in \mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et qu'il existe deux mesures bornées λ et μ telles que $|D^m u_n|^p \rightharpoonup \mu$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$-faible et $|u_n|^{p^{*m}} \rightharpoonup \lambda$ étroitement. Alors :

1) *Il existe un ensemble au plus dénombrable J, des points $(x_j)_{j\in J}$ et des réels $(a_j)_{j\in J}$ tels que $a_j > 0$ et*

$$\lambda = |u|^{p^{*m}} + \sum_{j\in J} a_j \delta_{x_j}.$$

2) *De plus il existe des réels $b_j > 0$ tels que $S(m,p,N)a_j^\theta \le b_j$ et*

$$|D^m u|^p + \sum_{j\in J} b_j \delta_{x_j} \le \mu \quad et \quad \sum_{j\in J} a_j^\theta < \infty.$$

3) *Si $v \in \mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et $|D^m(u_n+v)|^p \rightharpoonup \widetilde{\mu}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$-faible, alors $\widetilde{\mu} - \mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et*

$$|D^m(u+v)|^p + \sum_{j\in J} b_j \delta_{x_j} \le \widetilde{\mu}.$$

4) *Si $u \equiv 0$ et $0 < \int d\mu \le S(m,p,N) \int d\lambda$, alors J est réduit à un seul élément et il existe $c > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tels que*

$$\lambda = c\delta_{x_0} \quad et \quad \mu = S(m,p,N)c^{1+\theta}\delta_{x_0}\,.$$

9. L'exemple de l'équation de champ

Nous reprenons ici le problème que nous avons traité dans les paragraphes précédents, en utilisant cette fois le lemme de concentration-compacité de P.L. Lions. Soient $m \ge 1$ un entier et, pour $\lambda > 0$, les ensembles

$$\widetilde{S}_\lambda := \left\{ u \,;\, G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx = \lambda \right\},$$

$$S_\lambda := (H^1(\mathbb{R}^N))^m \cap \widetilde{S}_\lambda. \tag{9.1}$$

On supposera que G satisfait les conditions suivantes :

$$G \in C\,(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})\,, \qquad G(0) = 0, \tag{9.2}$$

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{-2^*} G(s) = 0, \tag{9.3}$$

$$\exists a_0 > 0,\ \exists \delta_0 > 0 \ \text{ tels que } \ G(s) \le \frac{-a_0}{2}|s|^2 \ \text{ si } |s| \le \delta_0. \tag{9.4}$$

$$\exists s_0 \in \mathbb{R}^m, \quad G(s_0) > 0. \tag{9.5}$$

9.1 Théorème. *Soient $N \ge 3$ et G une fonction vérifiant les conditions (9.2)–(9.5). Si $J(u) := \|\nabla u\|^2$, S_λ est défini par (9.1) et*

$$I_\lambda := \inf\{J(v)\ ;\ v \in S_\lambda\}\,,$$

alors pour tout $\alpha \in]0,\lambda[$, *on a* $I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}$, *et cette inégalité stricte est une condition suffisante pour que toute suite minimisante soit relativement compacte (modulo des translations) dans* $(H^1(\mathbb{R}^N))^m$. *En particulier* J *atteint son minimum sur* S_λ *pour tout* $\lambda > 0$.

Démonstration. On sait que la condition (9.5) implique que $S_\lambda \neq \varnothing$. Par ailleurs si $u \in S_1$, en posant $v(x) := u(\lambda^{-1/N}x)$, on a $v \in S_\lambda$, et on voit de cette manière que $I_\lambda = \lambda^{(N-2)/N} I_1$. De même nous attirons l'attention sur le fait que la condition (9.4) implique que toute suite minimisante $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Vérifions d'abord que $I_\lambda > 0$ pour tout $\lambda > 0$. En effet en posant $G_0(s) := G(s) + \frac{a_0}{2}|s|^2$, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$G_0^+(s) \le \varepsilon|s|^2 + C(\varepsilon)|s|^{2^*},$$

pour tout $s \in \mathbb{R}^m$. En utilisant l'inégalité de Sobolev on peut donc écrire, pour tout $u \in S_\lambda$

$$\frac{a_0}{2}\|u\|^2 + \lambda \le \int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(u(x))dx \le \varepsilon\|u\|^2 + C(\varepsilon)\|\nabla u\|^{2^*},$$

ce qui, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, permet de voir qu'il existe une constante $C(\lambda) > 0$ telle que pour tout $u \in S_\lambda$ on ait $J(u) \ge C(\lambda)$, et ainsi $I_\lambda \ge C(\lambda) > 0$.

Soit maintenant $\theta := 1 - \frac{2}{N}$. Comme $0 < \theta < 1$ et que $I_\lambda = \lambda^\theta I_1 > 0$, on remarque que pour $0 < \alpha < \lambda$, en supposant par exemple que $\alpha \ge \lambda - \alpha$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lambda^\theta < \frac{\lambda}{\alpha}\alpha^\theta &= \alpha^\theta + \frac{\lambda-\alpha}{\alpha}\alpha^\theta \\ &< \alpha^\theta + \frac{\lambda-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}(\lambda-\alpha)^\theta,\end{aligned}$$

c'est à dire que finalement on a l'inégalité stricte

$$\forall \alpha \in]0,\lambda[, \qquad I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}\,. \tag{9.6}$$

Nous allons prouver que cette inégalité stricte empêche l'apparition de dichotomie pour les suites minimisantes.

Plus précisément posons $\rho_n := |\nabla u_n|^2 + |u_n(x)|^2$ et

$$Q_n(R) := \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} \left(|\nabla u_n(x)|^2 + |u_n(x)|^2\right) dx.$$

Rappelons que $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$; admettons que $Q_n(R) \to Q(R)$, $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$-faible et $u_n \to u$ p.p. et dans $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pour $q < 2^*$. Comme

$$0 < I_\lambda < J(u_n) \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx =: b_n\,,$$

on peut appliquer le lemme 8.1 à ρ_n (ou à ρ_n/b_n), en supposant que $b_n \to b > 0$.

Pour vérifier que le cas 2 du lemme 8.1, l'évanescence, ne se présente pas, supposons que pour un $R > 0$ on ait

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^2 dx \right] = 0.$$

Rappelons que le lemme 8.4 implique que si $2 < q < 2^*$, alors $\|u_n\|_{L^q}$ tend vers zéro. D'autre part, avec les notations ci-dessus, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\begin{cases} G_0^+(s) \le \varepsilon |s|^2 & \text{si } |s| \le \delta\,, \\ G_0^+(s) \le \varepsilon |s|^{2^*} & \text{si } |s| \ge t\,. \end{cases}$$

Ainsi il est clair que l'on peut écrire, pour une constante $C := C(q,\varepsilon)$,

$$G_0^+(s) \le \varepsilon(|s|^2 + |s|^{2^*}) + C|s|^q,$$

et en conclure que

$$0 < \lambda \le \int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(u_n(x))dx \le \varepsilon \left(\|u_n\|^2 + \|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} \right) + C\|u_n\|_{L^q}^q.$$

Or, en se rappelant que $\|u_n\|^2 + \|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*}$ est bornée par une constante C_0 indépendante de n, ε et en passant à la lim sup dans cette inégalité, on obtient $0 < \lambda \le \varepsilon C_0$. Cela est impossible car $\varepsilon > 0$ est arbitraire ; par conséquent l'évanescence ne se produit pas pour la suite ρ_n.

S'il y avait dichotomie, on aurait $Q(\infty) = \beta \in]0, b[$ et pour $\varepsilon > 0$ fixé assez petit (en particulier $4\varepsilon < \min(\beta, b-\beta)$), en prenant $R_0 > 0$ tel que $Q(R_0) \ge \beta - \varepsilon$, on peut trouver $y^n \in \mathbb{R}^N$ et une suite $R_n \to \infty$ tels que

$$\int_{B(y^n,R_0)} \left(|\nabla u_n(x)|^2 + |u_n(x)|^2 \right) dx \ge \beta - 2\varepsilon,$$

et $Q_n(R_n) \le \beta + \varepsilon$. Soit maintenant $\varphi_* \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction décroissante avec $0 \le \varphi_* \le 1$, $\varphi_*(t) = 1$ pour $t \le 1$, $\varphi(t) = 0$ si $t \ge 2$ et $|\varphi_*'| \le 2$. Introduisons, comme nous l'avons fait à l'exemple 8.5, les fonctions $\varphi(x) := \varphi_*(|x|)$ et

$$\varphi_n(x) := \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_*}\right), \qquad \zeta_n(x) := 1 - \varphi\left(\frac{x - y^n}{R_n}\right),$$

puis $u_{1,n} := \varphi_n u_n$, et $u_{2,n} := \zeta_n u_n$. On peut choisir $R_* > \max(R_0, 1)$ assez grand pour que, en supposant que $R_n > R_*$, on ait pour tout n :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)^2 |\nabla u_n(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_n u_n)(x)|^2 dx \right| \le \varepsilon$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \zeta_n(x)^2 |\nabla u_n(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\zeta_n u_n)(x)|^2 dx \right| \le \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$J(u_n) \geq J(u_{1,n}) + J(u_{2,n}) - 2\varepsilon\,. \tag{9.7}$$

On doit également faire remarquer que u_n étant proche de $u_{1,n} + u_{2,n}$ au sens de la norme de $H^1(\mathbb{R}^N)$, grâce aux hypothèses (9.3) et (9.4) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |G(u_n(x)) - G(u_{1,n}(x)) - G(u_{2,n}(x))|\,dx \leq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. On définit, moyennant des extractions de sous-suites,

$$\lambda_i(\varepsilon) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_{i,n}(x))dx\ ;$$

ainsi on sait que $|\lambda - \lambda_1(\varepsilon) - \lambda_2(\varepsilon)| \leq \eta(\varepsilon)$. Soit $v_{i,n} \in S_{\lambda_i(\varepsilon)}$, pour $i = 1, 2$, tels que $\|u_{i,n} - v_{i,n}\|_{H^1} \leq \varepsilon_0$, pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit. En utilisant (9.7), on obtient

$$I_\lambda \geq I_{\lambda_1(\varepsilon)} + I_{\lambda_2(\varepsilon)} - 4\varepsilon.$$

Finalement en faisant tendre ε vers zéro, *modulo* des extractions de sous-suites, $\lambda_i(\varepsilon)$ tend λ_i^* pour $i = 1, 2$ et

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* = \lambda, \qquad I_\lambda \geq I_{\lambda_1^*} + I_{\lambda_2^*}\,. \tag{9.8}$$

On ne peut pas avoir $\lambda_1^* < 0$ car dans ce cas on aurait $\lambda_2^* > \lambda$, et on obtiendrait $I_\lambda \geq I_{\lambda_2^*} > I_\lambda$ (car $\alpha \mapsto I_\alpha$ est strictement croissante). De même il est exclu d'avoir $\lambda_2^* < 0$.

Si on avait $\lambda_1^* = 0$, on aurait alors $\lambda_2^* = \lambda$, et du fait que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = I_\lambda$$

et que $\int_{\mathbb{R}^N} G(u_{2,n}(x))dx$ tend vers λ lorsque $n \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$, on peut déduire de (9.7) que pour n assez grand et ε assez petit on a

$$J(u_n) \geq J(u_{1,n}) + I_\lambda - 4\varepsilon,$$

ce qui implique que $J(u_{1,n}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. Comme pour tout $\theta > 0$ il existe une constante $C(\theta)$ telle que $G_0^+(s) \leq \theta|s|^2 + C(\theta)|s|^{2^*}$, l'inégalité de Sobolev et le fait que $(u_{1,n})_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ impliquent que $G_0^+(u_{1,n})$ tend vers zéro dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. Or en posant $\lambda_{1,n} := \int_{\mathbb{R}^N} G(u_{1,n}(x))dx$, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_0^+(u_{1,n}(x))dx = \lambda_{1,n} + \int_{\mathbb{R}^N} G_0^-(u_{1,n}(x))dx + \frac{a_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1,n}(x)|^2 dx\,,$$

et sachant que $\lambda_{1,n} \to 0$, on conclut que $u_{1,n} \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, et finalement que $u_{1,n} \to 0$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. Or d'après la construction même de $u_{1,n}$ on sait que

$$\|u_{1,n}\|_{H^1}^2 \geq \int_{B(y^n,R_*)} \rho_n(x)dx \geq \beta - \varepsilon > \frac{3}{4}\,\beta > 0.$$

Par conséquent on ne peut pas avoir $\lambda_1^* = 0$. De la même manière on exclut que $\lambda_2^* = 0$.

En conclusion, dans (9.8) on a $\lambda_i^* \in]0, \lambda[$, et l'inégalité $I_\lambda \geq I_{\lambda_1^*} + I_{\lambda_2^*}$ contredit l'inégalité stricte établie plus haut en (9.6), et ainsi la dichotomie est exclue pour la suite $\rho_n = |\nabla u_n|^2 + |u_n|^2$.

Le lemme de concentration-compacité 8.1, permet de conclure qu'il existe une suite $y^n \in \mathbb{R}^N$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ vérifiant

$$\forall n \geq 1, \qquad I_\lambda \geq \int_{B(y^n,R)} \left(|\nabla u_n(x)|^2 + |u_n(x)|^2\right) dx \geq I_\lambda - \varepsilon.$$

On en conclut qu'en posant $v_n(x) := u_n(x + y^n)$, on a $J(v_n) \to I_\lambda$, et qu'il existe $v \in S_\lambda$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On voit par la même occasion que toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, *modulo* une suite de translations. □

9.2 Remarque. Dans les exemples que nous avons traités plus haut, nous n'avons pas eu à utiliser toute la généralité du lemme de concentration-compacité. En effet pour établir la non-évanescence de la suite ρ_n, nous utilisons seulement le fait que si pour un $R > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^q dx \right] = 0,$$

alors il y a une contradiction avec $u_n \neq 0$. Cependant dans beaucoup d'autres problèmes, surtout ceux où il y a un *exposant limite*, ou bien lorsque la non-compacité est *locale*, la preuve de la non-évanescence est plus délicate. □

10. L'exposant limite de Sobolev

Pour finir ce chapitre, nous dirons quelques mots sur les problèmes qui font intervenir l'exposant limite de Sobolev, lorsque $N \geq 3$. En fait dans le cas général, il y a des problèmes dans lesquels l'espace *naturel* H, sur lequel on minimise une fonctionnelle J, s'injecte de façon continue mais non compacte dans un espace de Banach X et de ce fait le problème de minimisation est plus délicat. Un exemple en dimension $N = 1$ en est la minimisation de

$$J(v) := \int_0^1 \left[|u'(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2\right] \rho(x)dx,$$

sur $S := \left\{ u \,;\, u(1) = 0,\ \int_0^1 |u(x)|^m \rho(x)dx = 1 \right\}$, où $m := 2(\alpha+1)/(\alpha-1)$ et ρ est une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $\rho(x) > 0$ pour $x > 0$ et, par exemple, $\rho(x) \sim x^\alpha$ au voisinage de zéro pour un réel $\alpha > 1$.

Dans ce paragraphe nous voulons seulement montrer, sur un exemple simple, comment il est possible de résoudre certains problèmes de minimisation lorsque l'on n'a plus de compacité *locale*.

Lors de la présentation de l'identité de Pohožaev, nous avons dit que dans un ouvert Ω borné, régulier et étoilé de $\mathbb{R}^N$ et pour $\lambda \leq 0$ fixé, le problème

$$\text{(10.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

n'admet pas de solution autre que zéro lorsque $N \geq 3$ et $p := \frac{N+2}{N-2}$. Nous allons montrer ici un résultat dû à H. Brezis & L. Nirenberg [36] (voir aussi l'article de Th. Aubin [9], ainsi que M. Struwe [156]), qui dit essentiellement que l'équation (10.1) admet une solution positive si $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_1[$, où λ^* est une constante dépendant de N et de l'ouvert Ω. A part les travaux que nous venons de citer, il y a de nombreux autres qui traitent des problèmes de ce type sans compacité locale (conjecture de Yamabe, conjecture de Rellich, problème de Plateau, H-systèmes, cristaux liquides, etc.). On pourra consulter à ce sujet le livre de M. Struwe [159], ainsi que les articles de H. Brezis [29, 30].

Dans toute la suite on supposera que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on posera

$$\text{(10.2)} \qquad J_\lambda(v) := \int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 - \lambda |v(x)|^2 \right) dx,$$

$$\text{(10.3)} \qquad \sigma(\lambda) := \inf \left\{ J_\lambda(v) \; ; \; v \in H_0^1(\Omega), \; \int_\Omega |v(x)|^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

On rappelle que $\sigma(0)$ est indépendant de Ω et que (voir remarque 3.10)

$$\sigma(0) = 2\pi(N-2) \left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)} \right]^{2/N}.$$

De plus si $\varphi_{a,b}(x) := \left(a + b|x|^2\right)^{(2-N)/2}$, on a

$$\sigma(0) \, \|\varphi_{a,b}\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla \varphi_{a,b}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On désignera également par λ_1 et $\varphi_1 > 0$ les premières valeur propre et fonction propre de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$, i.e. (en notant $\|\cdot\|$ la norme de $L^2(\Omega)$)

$$\lambda_1 := \min \left\{ \|\nabla v\|^2 \; ; \; v \in H_0^1(\Omega), \; \|v\|^2 = 1 \right\}.$$

10.1 Théorème. *Soient $N \geq 3$, Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ et J_λ et $\sigma(\lambda)$ donnés par (10.2), (10.3). Si $0 < \sigma(\lambda) < \sigma(0)$, alors $\sigma(\lambda)$ est un mimimum, plus précisément il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, telle que $u_0 \geq 0$, $\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1$ et $J_\lambda(u_0) = \sigma(\lambda)$. De plus toute suite minimisante est relativement compacte dans $H_0^1(\Omega)$, et l'équation (10.1) admet une solution positive $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Remarquons en premier lieu que pour avoir $\sigma(\lambda) > 0$, il faut que $\lambda < \lambda_1$. En effet comme d'après l'inégalité de Poincaré $J_{\lambda_1}(v) \geq 0$ pour tout

$v \in H_0^1(\Omega)$ et que $J_{\lambda_1}(\varphi_1) = 0$, on a $\sigma(\lambda_1) = 0$, et il devient clair que pour $\lambda \geq \lambda_1$ on a $\sigma(\lambda) \leq \sigma(\lambda_1) = 0$.

Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante. Comme $\|u_n\|_{2^*} = 1$, la suite est bornée dans $L^2(\Omega)$, et par conséquent dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe donc $uH_0^1(\Omega)$ telle que, moyennant une extraction de sous-suite,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{dans } H_0^1(\Omega)\text{-faible,} \\ u_n \to u & \text{p.p. sur } \Omega \text{ et dans } L^q(\Omega) \text{ pour } 1 \leq q < 2^*. \end{cases}$$

Le but est de prouver que $\|u\|_{2^*} = 1$ ou encore, ce qui revient au même, que $u_n \to u$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ (voir le lemme de Brezis-Lieb **1.**4.6 et le corollaire **1.**4.7). Soit $v_n := u_n - u$; d'après le lemme de Brezis-Lieb **1.**4.6, on a

$$1 = \int_\Omega |u_n(x)|^{2^*} dx = \int_\Omega \left[|u(x)|^{2^*} + |v_n(x)|^{2^*} \right] dx + \varepsilon(n),$$

où, ici et dans la suite, $\varepsilon(n)$ désigne différentes suites de réels qui tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. En utilisant le fait que l'on a $(a+b)^\theta \leq a^\theta + b^\theta$ pour $0 < \theta < 1$ et $a, b \geq 0$, on conclut que

$$1 + \varepsilon(n) \leq \left(\int_\Omega \left[|u(x)|^{2^*} + |v_n(x)|^{2^*} \right] dx \right)^{2/2^*} \leq \|u\|_{2^*}^2 + \|v_n\|_{2^*}^2. \tag{10.4}$$

Par ailleurs, comme $v_n \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$-faible, on sait que

$$J_\lambda(u) + \|\nabla v_n\|^2 = \sigma(\lambda) + \varepsilon(n) \ ;$$

mais, pour n assez grand $\sigma(\lambda) + \varepsilon(n) > 0$ et, en utilisant (10.4), on peut écrire $\sigma(\lambda) \leq \sigma(\lambda) \left[\|u\|_{2^*}^2 + \|v_n\|_{2^*}^2 \right] + \varepsilon(n)$; donc

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) + \|\nabla v_n\|^2 &\leq \sigma(\lambda) \left[\|u\|_{2^*}^2 + \|v_n\|_{2^*}^2 \right] + \varepsilon(n) \\ &\leq J_\lambda(u) + \sigma(\lambda) \|v_n\|_{2^*}^2 + \varepsilon(n) \end{aligned}$$

puisque, par définition de $\sigma(\lambda)$, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ on a $\sigma(\lambda)\|\varphi\|_{2^*}^2 \leq J_\lambda(\varphi)$. Finalement on déduit de cette dernière inégalité, et du fait que $\|\nabla v_n\|^2 \geq \sigma(0)\|v_n\|_{2^*}^2$:

$$(\sigma(0) - \sigma(\lambda)) \|\nabla v_n\|^2 \leq \varepsilon(n),$$

ce qui montre que v_n tend vers zéro dans $H_0^1(\Omega)$-fort, et par conséquent $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Comme on peut remplacer la suite minimisante u_n par $|u_n|$ et avoir encore une suite minimisante, $\sigma(\lambda)$ est atteint en un point $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$. On vérifie alors facilement que

$$-\Delta u_0 - \lambda u_0 = \sigma(\lambda) u_0^p,$$

où $p := (N+2)/(N-2)$. Comme $\lambda < \lambda_1$, le principe du maximum fort implique que $u_0 > 0$ dans Ω. Par ailleurs, on sait que $u_0^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ et, d'après le lemme de Brezis-Kato, on a $u \in L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$. Finalement les théorèmes de régularité classiques impliquent que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. □

Nous allons maintenant voir que pour certaines valeurs de λ on a bien $\sigma(\lambda) < \sigma(0)$.

10.2 Proposition. *Avec les notations et hypothèses du théorème 10.1, σ est continue et décroissante (au sens large) sur $[0, \lambda_1]$ et on a $\sigma(\lambda_1) = 0$. En particulier il existe $\lambda^* \geq 0$, avec $\lambda^* < \lambda_1$ tel que pour $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$ on a $\sigma(\lambda) < \sigma(0)$ (plus précisément si $N \geq 4$ on a $\lambda^* = 0$).*

Démonstration. Nous avons déjà vu que pour $\lambda \leq \lambda_1$ on a $\sigma(\lambda) \geq 0$ et que $\sigma(\lambda_1) = 0$. Pour montrer les autres propriétés, notons que pour $v \in H^1_0(\Omega)$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto J_\lambda(v)$ est une fonction affine décroissante, et par conséquent $\lambda \mapsto \sigma(\lambda)$, qui est l'enveloppe inférieure de ces fonctions affines, est une fonction concave et décroissante. On a déjà vu que $\sigma(\lambda) = \sigma(0) > 0$ pour $\lambda \leq 0$, et que $\sigma(\lambda_1) = 0$. Comme toute fonction concave de $[0, \lambda_1]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, on en conclut qu'il existe $\lambda^* > 0$ avec $\lambda^* < \lambda_1$ tel que $0 < \sigma(\lambda) < \sigma(\lambda^*) = \sigma(0)$ pour $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$.

En réalité on peut montrer, comme le font H. Brezis & L. Nirenberg dans [36], qu'en prenant une fonction $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ telle que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$ puis en posant

$$v_\varepsilon(x) := \varphi(x)\left(\varepsilon + |x - x_0|^2\right)^{(2-N)/2} \quad \text{et} \quad u_\varepsilon := v_\varepsilon / \|v_\varepsilon\|_{2^*},$$

on a, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\begin{cases} J_\lambda(u_\varepsilon) = \sigma(0) - \lambda C_0 \varepsilon + O(\varepsilon^{(N-2)/2}) & \text{si } N \geq 5 \\ J_\lambda(u_\varepsilon) = \sigma(0) - \lambda C_0 \varepsilon |\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon) & \text{si } N = 4, \end{cases}$$

pour une constante $C_0 > 0$. Dans le cas $N = 3$ et lorsque Ω est une boule, ils montrent également que $\lambda^* = \lambda_1/4$. Ces résultats sont obtenus en analysant les différentes intégrales qui interviennent dans $J_\lambda(u_\varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \to 0$ et montrent également que si $\lambda \leq 0$ on a $\sigma(\lambda) = \sigma(0)$. □

Exercices du chapitre 6

Exercice 1. On désigne par $C^\infty_{c,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions radiales de $C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $C^\infty_{c,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2. Soit $u \in \mathscr{D}^{1,2}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ (i.e. une fonction mesurable et radiale de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\partial_i u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour $i \overset{\geq}{\leq} 1 \atop N$, ou encore l'adhérence des fonctions radiales de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\varphi \mapsto \|\nabla\varphi\| := \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$). Montrer qu'il existe une constante $C(N)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N,\ |x| \geq 1, \quad |u(x)| \leq C(N)|x|^{\frac{-(N-2)}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

(Si $\varphi(r) := u(x)$ pour $r = |x|$, considérer la fonction

$$z(t) := \varphi\left(e^t\right) \exp\left(\alpha t\right),$$

définie pour $t \in \mathbb{R}$ et une valeur convenablement choisie de α ; remarquer que $|z(t)| \leq C\|z\|_{H^1(\mathbb{R})}$, puis calculer $\int_0^\infty r^{N-1}|\varphi'(r)|^2 dr$ en fonction de z', z).

Exercice 3. On suppose que $1 < p < \infty$. Montrer qu'il existe une constante $C(p, N)$ telle que, pour $u \in W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on ait

$$|u(x)| \leq C(p,N)|x|^{\frac{-(N-1)}{p}} \left(\|\nabla u\|_p + \|u\|_p\right).$$

Exercice 4. Pour $1 < p < \infty$, en utilisant l'*Exercice 3*, étudier l'existence d'une solution positive au problème

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \lambda|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

pour différentes valeurs de λ, q (ici $|\nabla u|$ désigne la norme euclidienne de ∇u dans $\mathbb{R}^N$).

En supposant que $\lambda > 0$, $p < q$ et $(N-p)q < Np$, étudier l'existence d'une infinité de solutions au problème précédent.

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, connexe et de classe C^1. Dans un travail datant de 1971, J. Serrin [150] a montré que si une fonction positive u satisfait $-\Delta u = f(u)$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, si en plus la dérivée normale $\partial u/\partial \mathbf{n}$ est constante sur $\partial\Omega$, alors Ω est une boule (en supposant toutefois que

f est assez régulière ; en fait en utilisant la méthode du même article on peut voir que si $-\Delta u = f(u)$ dans une boule Ω et $u = 0$ sur le bord $\partial\Omega$, alors u est radiale décroissante par rapport au centre de la boule). Dans le cas particulier où $f(u) \equiv 1$, H.F. Weinberger [163] a donné une démonstration simple de ce fait, que nous présentons ici. Dans la suite on suppose que $-\Delta u = 1$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$; on supposera aussi que $c := \partial u/\partial \mathbf{n}$ est constante.

1) En utilisant l'identité de Pohožaev, montrer que

$$(N+2)\int_\Omega u(x)dx = c^2 N \mathrm{mes}(\Omega)\,. \tag{1}$$

2) Soit $z(x) := |\nabla u(x)|^2 + \frac{2}{N}u(x)$. En remarquant que :

$$1 = (\Delta u)^2 \le N\sum_{i=1}^N |\partial_{ii}u|^2 \le N\sum_{i,j=1}^N |\partial_{ij}u|^2, \tag{2}$$

calculer Δz et montrer que $-\Delta z \le 0$ dans Ω.

3) Montrer que $\int_\Omega z(x)dx = c^2\mathrm{mes}(\Omega)$.

4) En utilisant le principe du maximum fort et la question précédente, montrer que $z \equiv c^2$ dans Ω.

5) Montrer que $N\sum_{i,j=1}^N |\partial_{ij}u(x)|^2 \equiv 1$ dans Ω, et que dans (2) on a égalité partout. En déduire que si $i \neq j$, alors $\partial_{ij}u = 0$.

6) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\sum_{i=1}^N \partial_{ii}u = -1$, montrer que $\partial_{ii}u = -1/N$ dans Ω.

7) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $A \in \mathbb{R}$ tels que $u(x) = \left(A - |x - x_0|^2\right)/N$ dans Ω. Déduire du fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, que $A > 0$ et que si $R^2 := A$ alors Ω est la boule $B(x_0, R)$.

Exercice 6. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = g(u). \tag{1}$$

1) On suppose que $g(u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, où G est la primitive de g s'annulant en zéro. Montrer que u satisfait l'identité (de Pohožaev) :

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx.$$

2) On suppose que $p < N$. En prenant pour exemple le cas $p = 2$ traité au paragraphe § 4 et en utilisant l'*Exercice 3*, donner les conditions les plus générales sur g pour que l'équation (1) admette un état fondamental.

3) Traiter également la cas $p = N$, en utilisant toujours les fonctions radiales.

Exercice 7. Soient $1 < p < \infty$ et $\delta, \varepsilon > 0$. Enoncer et montrer le lemme de Lieb 6.2 pour une suite de fonctions $(u_n)_n$ de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ telles que $(\|\nabla u_n\|_p)_n$ est bornée et

$$\forall n \geq 1, \qquad \text{mes}\left([|u_n| \geq \varepsilon]\right) \geq \delta.$$

Exercice 8. En utilisant l'*Exercice 7*, reprendre l'étude de l'équation (1) de l'*Exercice 6* (sans utiliser les fonctions radiales).

Exercice 9. Soient $N \geq 2$ un entier, $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$ un réel et $\lambda > 0$. On considère $S_\lambda := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ \|u\|^2 = \lambda\right\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(\mathbb{R}^N)$. On pose

$$G(s) := \frac{|s|^{p+1}}{p+1}, \quad J(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 dx - G(v(x))\right] dx.$$

On considère le problème de minimisation

$$I_\lambda := \inf_{v \in S_\lambda} J(v),$$

1) En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, montrer que les suites minimisantes de J sont bornées et que $I_\lambda > -\infty$.

2) En appliquant successivement les trois méthodes vues au chapitre 6 (lemme de Strauss, lemme de Lieb, méthode de concentration-compacité), montrer que I_λ est atteint.

3) Généraliser au cas d'une fonction G qui est un $o(s^2)$ en zéro et qui est équivalente à $c_0|s|^{p+1}$ à l'infini (avec $c_0 > 0$).

4) Montrer que si $p := 1 + \frac{4}{N}$ et λ est assez petit, le résultat de la question **2)** est encore vrai.

5) Vérifier que si $p > 1 + \frac{4}{N}$ alors $I_\lambda = -\infty$.

Exercice 10. Soient $k \geq 1$ un entier, ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$ et $\Omega := \mathbb{R}^{N-k} \times \omega$. On pose $\ell := N - k + 1$, et on considère $(a_{ij}(y))_{\ell \leq i,j \leq N}$ une matrice symétrique carrée d'ordre k à coefficients dans $L^\infty(\omega)$ telle que

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^k, \text{ p.p. sur } \omega, \quad \sum_{i,j=\ell}^{N} a_{ij}(y)\eta_i\eta_j \geq \alpha|\eta|^2.$$

On désigne par $\lambda_1(\omega)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur

$$A_k u := -\sum_{i,j=\ell}^{N} \partial_i(a_{ij}(y)\partial_j u)$$

sur $H_0^1(\omega)$. Montrer que si pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on considère l'opérateur

$$Au := -\sum_{i,j=1}^{\ell-1} \partial_{ii} u - A_k u,$$

alors $\lambda_1(\omega) = \inf\left\{\langle A\varphi, \varphi\rangle\ ;\ \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$.

Exercice 11. Avec les notations et hypothèses de l'*Exercice 10*, $x := (z, y)$ désignera le point générique de Ω avec $y \in \omega$. On considère une fonction $G \in C^1(\overline{\omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\exists \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \left[G(y, \varphi(z,y)) - \frac{\lambda_1(\omega)}{2} |\varphi(z,y)|^2 \right] dx > 0.$$

1) Enoncer et montrer l'analogue du lemme de Lieb sur Ω.

2) En reprenant les hypothèses adéquates du théorème 7.1 et en notant $g(\cdot, s) := \partial_s G(\cdot, s)$, établir l'existence d'un état fondamental pour l'équation :

$$\begin{cases} Au = g(\cdot, u) \\ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Exercice 12. Montrer, sous des hypothèses adéquates sur la fonction G, que pour $N \geq 3$ les fonctions $J(v) := \|\nabla v\|^2$ et $E(v) := \frac{1}{2} J(v) - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x)) dx$ atteignent leur minimum sur l'ensemble $S_{_P}$ des fonctions non nulles $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$(N-2)\|\nabla v\|^2 = 2N \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x)) dx$$

et qu' on obtient ainsi une solution de $-\Delta u = g(u)$ où $g := G'$.

Exercice 13. Montrer, sous des hypothèses adéquates sur la fonction G, que pour $N \geq 1$, la fonctionnelle d'énergie

$$E(v) := \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x)) dx$$

atteint son minimum sur l'ensemble $S_{_H}$ des fonctions $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telles que $v \neq 0$ et

$$\|\nabla v\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g(v(x)) v(x) dx,$$

et qu'on obtient ainsi une solution de $-\Delta u = g(u)$ (ici $g := G'$).

Exercice 14. Soit $G \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ telle que la condition (4.3) soit satisfaite et que, pour un $\delta > 0$, on ait $G(s) \leq -\frac{1}{2} a_0 |s|^2$ pour un $a_0 > 0$ fixé et pour tout $s \in \mathbb{R}^m$ tel que $|s| \leq \delta$. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, il existe $C > 0$ telle que la dérivée $g := G'$ vérifie $|g(s)| \leq C \left(|s| + \exp\left[\alpha |s|^2\right] \right)$ pour tout $s \in \mathbb{R}^m$.

1) Montrer que tout point critique de $J(v) := \|\nabla v\|^2$ sur

$$\Sigma := \left\{ u \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2) \; ; \; \int_{\mathbb{R}^2} G(u(x)) dx = 0 \;\text{ et }\; \|u\|^2 = 1. \right\}$$

permet d'obtenir une solution de $-\Delta u = g(u)$ (on peut en fait montrer que J possède une infinité de points critiques sur Σ, en supposant toutefois que G est de classe C^2 et paire).

2) Montrer que s'il existe $s_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $G(s_0) > 0$, alors $\Sigma \neq \varnothing$ et J atteint son minimum sur Σ, en utilisant successivement les fonctions radiales, le lemme de Lieb et la méthode de concentration-compacité.

Exercice 15. On montre ici le lemme suivant concernant une suite de fonctions croissantes.

> **Lemme.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_i})_i$ et une fonction croissante f de $[0,1]$ dans lui-même telles que $f_{n_i} \to f$ en dehors d'une infinité dénombrable de points de $[0,1]$.*

1) Soit φ une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On désigne par $D(\varphi)$ l'ensemble des points de discontinuité de φ. Montrer que $D(\varphi)$ est dénombrable (en posant

$$\varphi(x_\pm) := \lim_{h \to 0^+} \varphi(x \pm h),$$

considérer les ensembles $A_n := \left\{x \ ; \ \varphi(x_+) - \varphi(x_-) \geq \frac{1}{n}\right\}$).

2) Soit $(a_j)_{j \geq 1}$ une suite dense dans $[0,1]$. Par le procédé de la suite diagonale, montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_i})_{i \geq 1}$ de la suite $(f_n)_n$ telle que pour tout $j \geq 1$ fixé la suite $(f_{n_i}(a_j))_i$ soit convergente. La limite de cette suite sera notée $f(a_j)$.

3) Pour $x \in [0,1]$ on pose $f(x) := \sup\{f(a_j) \ ; \ a_j \leq x\}$. Montrer que f est croissante et que si $x \notin D(f)$ alors $f_{n_i}(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque $i \to \infty$.

4) En déduire que de façon générale, toute suite de $\mathbf{BV}(0,1)$ contient une sous-suite convergeant p.p. vers une fonction f appartenant à $\mathbf{BV}(0,1)$.

Exercice 16. Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\lim_{t \to 0} |t|^{-2^*} f(t) = 0, \qquad \lim_{|t| \to \infty} |t|^{-2^*} f(t) = 0.$$

On suppose que $(u_n)_n$ est une suite bornée de $\mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ telle que pour un $R > 0$ fixé on ait :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} \left(|\nabla u_n(x)|^2 + |u_n(x)|^{2^*} \right) dx \right] = 0.$$

Montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n(x))| dx$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Exercice 17. En reprenant le problème traité à l'exemple 8.4, montrer que le minimum de J est atteint sur S_λ, en appliquant le lemme de concentration-compacité à la suite

$$\rho_n(x) := |\nabla u_n(x)|^2 + |u_n(x)|^2$$

(au lieu de $|u_n|^{p+1}$, comme on l'a fait dans cet exemple).

Exercice 18. On reprend ici les hypothèses et notations de l'exemple traité au paragraphe § 9 et on pose $\rho_n := |G(u_n)|$, où $u_n \in S_\lambda$ est une suite minimisante.

1) En remarquant que $|s|^2 \leq \varepsilon |s|^{2^*} + C_\varepsilon |G(s)|$, pour $\varepsilon > 0$ fixé et une constante $C_\varepsilon > 0$, montrer que si

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} |G(u_n(x))| dx \right] = 0, \tag{1}$$

alors pour tout $p > 2$ tel que $p < 2^*$, on a $\|u_n\|_{L^p} \to 0$ et en conclure que (1) n'est pas possible.

2) Montrer que la dichotomie au sens de **3)** du lemme de concentration-compacité ne se présente pas pour ρ_n, et en déduire que J atteint son minimum.

Exercice 19. Soient $N, m \geq 1$ des entiers et $G \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$, $G(s_0) > 0$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}^m$ et :

$$\exists a_0 > 0,\ \exists \delta_0 > 0 \ \text{ tels que } \ G(s) \leq \frac{-a_0}{2}|s|^2 \ \text{ si } |s| \leq \delta_0.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par S_λ l'ensemble des $u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^m$ tels que $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) = \lambda$, et on pose $J(v) := \|\nabla v\|^2$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $S_\lambda \neq \varnothing$.

2) Montrer que si $\lambda < 0$, alors $I_\lambda := \inf_{v\in S_\lambda} J(v) = 0$.

3) Montrer que si $N \geq 3$, on a $\inf\{J(v)\ ;\ v \in S_0,\ v \neq 0\} = 0$.

4) Montrer que si $N \leq 2$ et $\lambda > 0$, alors I_λ n'est pas atteint.

Exercice 20. Soit $Au := -\Delta u + |x|^2 u$ pour $u \in D(A)$ où

$$D(A) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N)\ ;\ Au \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

(Ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$; A est l'opérateur de l'oscillateur harmonique). On considère l'espace H_1 défini par :

$$H_1 := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N)\ ;\ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^2 + |x|^2 u^2(x) \right) dx < \infty \right\},$$

et on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$ induite par le produit scalaire

$$(u|v)_1 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + |x|^2 u(x) v(x) \right) dx.$$

1) Montrer que l'injection de H_1 dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est compacte pour $2 \leq q < 2^*$.

2) On considère ici, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon = \pm 1$ l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon |x|^2 u = \lambda u + \mu |u|^{p-1} u\,, \\ u \in H_1 \setminus \{0\}\ . \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que si $\Delta u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $(N-2)p \leq N+2$, alors on a l'identité de Pohožaev :

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2dx+\varepsilon\frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2u^2(x)dx=$$
$$+N\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\lambda}{2}u^2(x)+\frac{\mu}{p+1}|u(x)|^{p+1}\right]dx.$$

3) En déduire que si $\lambda\geq 0$ et $\mu\geq 0$, alors l'équation (1) n'a pas de solution pour $\varepsilon=-1$.

4) Montrer que A admet une fonction propre positive pour la valeur propre $\lambda_1:=N$.

5) Soient $N\geq 3$, $p:=(N+2)/(N-2)$ et $\varepsilon=\mu=1$. En utilisant la démarche du paragraphe § 10, montrer qu'il existe λ_* tel que, pour $\lambda_*<\lambda<N$, l'équation (1) admette une solution positive.

6) Calculer λ_* en fonction de N.

7) On suppose que $\varepsilon=\mu=1$, $N\geq 1$ et $(N-2)p\leq N+2$. Montrer que les solutions de (1) vérifient

$$|u(x)|\leq C\ \exp(-\delta|x|^2),$$

pour des constantes $C,\delta>0$.

Exercice 21. Soient $N\geq 1$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha+N>0$. On désigne par $|\cdot|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. En remarquant que

$$\operatorname{div}|x|^\alpha x=(\alpha+N)|x|^\alpha,$$

et par une intégration par parties, montrer que si $1<p<\infty$, on a l'inégalité de Hardy :

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p|x|^\alpha dx\leq\frac{p^p}{(\alpha+N)^p}\int_{\mathbb{R}^N}|x\cdot\nabla u(x)|^p|x|^\alpha dx,$$

pour toute fonction $u\in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, et en fait pour les fonctions u telles que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p|x|^{\alpha+p}dx$$

est finie. Montrer également que la constante $p^p(\alpha+N)^{-p}$ est la meilleure possible mais qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 22. Comme nous l'avons vu lors de la démonstration de l'inégalité de Poincaré et de l'inégalité de Hardy, le fait de pouvoir exprimer certaines fonctions comme la divergence d'autres fonctions, puis d'effectuer une intégration par parties, permet d'établir des inégalités importantes dans l'application des méthodes variationnelles. Nous en donnons un autre exemple ici sur $\mathbb{R}^N$ (voir M. Escobedo & O. Kavian [61]). Il s'agit de trouver des solutions non nulles de l'équation :

$$-\Delta u-x\cdot\nabla u=\lambda u+\varepsilon|u|^{p-1}u\quad\text{dans }\mathbb{R}^N,\tag{1}$$

où $\varepsilon=\pm 1$ est fixé. Soient $\rho(x):=\exp(|x|^2/2)$ pour $x\in\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ et, pour $m\geq 1$:

$$L^2(\rho) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 \rho(x) dx \right\} ,$$
$$H^m(\rho) := \left\{ u \in L^2(\rho) \; ; \; D^\alpha u \in L^2(\rho), \text{ pour } \; |\alpha| \leq m \right\} .$$

On désignera par $\|\cdot\|$ la norme de $L^2(\rho)$, et on munira $H^m(\rho)$ de la norme définie par $\|u\|_m^2 := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2$.

1) Vérifier que $L^2(\rho)$ et $H^m(\rho)$ sont des espaces de Hilbert et que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans ces espaces.

2) En remarquant que $|x|^2\rho(x) + N\rho(x) = \text{div}\,(x\rho(x))$, montrer que pour tout $u \in H^1(\rho)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 |x|^2 \rho(x) dx + N \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \rho(x) dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \rho(x) dx.$$

3) En déduire que l'injection de $H^1(\rho)$ dans $L^2(\rho)$ est compacte.

Dans la suite, on pose $Lu := -\Delta u - x \cdot \nabla u$ avec le domaine :

$$D(L) := \left\{ u \in H^1(\rho) \; ; \; Lu \in L^2(\rho) \right\} .$$

4) Montrer que L est un opérateur auto-adjoint et inversible sur $L^2(\rho)$ (on pourra noter que $Lu = -\rho^{-1}\text{div}\,(\rho\nabla u)$).

5) En utilisant la question **3)**, montrer que L^{-1} est compact de $L^2(\rho)$ dans lui-même et admet un spectre discret $(\mu_k)_k$, avec $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$.

6) En utilisant l'inégalité obtenue à la question **2)**, montrer que $D(L) = H^2(\rho)$.

7) Montrer que si $u \in D(L)$ vérifie $Lu \geq 0$ alors $u \geq 0$. En cherchant une fonction propre du type $\varphi_1(x) := \exp(-\beta|x|^2)$, trouver la première valeur propre λ_1 de L, ainsi qu'une fonction propre φ_1.

8) Montrer que si $(N-2)q \leq 2N$ et $q \geq 2$, alors $H^1(\rho) \subset L^q(\rho)$ avec injection continue, où ce dernier espace désigne l'ensemble des fonctions f telles que $|f|\rho^{1/q} \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Montrer aussi que cette injection est compacte si $(N-2)q < 2N$.

9) En étudiant $J(u) := \|\nabla u\|^2 - \lambda\|u\|^2$ sur une contrainte appropriée de $L^{p+1}(\rho)$, montrer que si $\varepsilon = 1$, alors l'équation (1) admet une infinité de solutions dans $H^1(\rho)$.

10) Montrer que les solutions trouvées à la question précédente sont de classe C^2 et tendent vers zéro à l'infini. Montrer de manière générale qu'il existe $\beta > 0$ telle que toute solution de (1) qui est dans $H^1(\rho)$ vérifie pour une constante $c_0 > 0$:

$$|u(x)| \leq c_0 \exp(-\beta|x|^2).$$

11) En étudiant la fonctionnelle :

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p+1}\rho(x)dx - \frac{\lambda}{2}\|v\|^2$$

sur $H^1(\rho)$ montrer que, si dans l'équation (1) on prend $\varepsilon = -1$, cette équation n'a pas de solution non nulle dans $H^1(\rho)$ si $\lambda \leq \lambda_1$. Montrer également que si $\lambda > \lambda_1$, alors (1) possède une solution positive.

12) Etudier l'existence de solutions multiples de (1) lorsque $\varepsilon = -1$.

Exercice 23. Soient $N \geq 3$ un entier et $p := (N+2)/(N-2)$. En utilisant la technique que nous avons vue au paragraphe § 10, et en reprenant les notations et l'étude de l'exercice précédent, on peut montrer qu'il existe $\lambda^* > 0$ tel que si $\lambda^* < \lambda < N$, l'équation

$$-\Delta u - x \cdot \nabla u = \lambda u + u^p \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

admet une solution $u > 0$ dans $H^1(\rho)$.

1) Montrer que si $u \in H^1(\rho)$ est solution, alors u satisfait une identité de Pohožaev, à savoir :

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla u(x))^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{N}{p+1} |u(x)|^{p+1} + \frac{N\lambda}{2} |u(x)|^2 \right) dx.$$

2) Montrer aussi que si $u \in H^1(\rho)$ est solution alors on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u(x)|^{p+1} + \lambda |u(x)|^2 \right) dx.$$

3) En utilisant l'inégalité de Hardy (voir *Exercice 21*), montrer que si $\lambda \leq N/2$ et $(N-2)p = N+2$, l'équation (1) n'a pas de solution non nulle dans $H^1(\rho)$.

4) Montrer, par les techniques vues au paragraphe § 10, que si $N \geq 4$ et $N/2 < \lambda < N$, alors l'équation (1) possède une solution $u > 0$ dans $H^1(\rho)$. Montrer que cette solution est de classe C^∞ et $u(x) \leq \exp(-\beta |x|^2)$ pour un $\beta > 0$.

5) Montrer que si $N = 3$ et $2 < \lambda < 3$, les conclusions de la question précédente sont valides.

Bibliographie

1. E. Acerbi & N. Fusco : *Semicontinuity problems in the calculus of variations* ; Arch. Rational Mech. & Analysis, **86** (1984), pp. 125–145.

2. R.A. Adams : *Sobolev Spaces* ; Academic Press, New York 1975.

3. F. Almgren & E.H. Lieb : *Symmetric rearrangement is sometimes continuous* ; J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), pp. 683–773.

4. A. Ambrosetti & G. Mancini : *Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems* ; Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **3** # 5 (1979), pp. 635–645.

5. A. Ambrosetti & G. Prodi : *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces* ; Annali di Matematica Pura & Applicata, **93** (1972), pp. 231–246.

6. A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz : *Dual variational methods in critical point theory and applications* ; J. Functional Analysis, **14** (1973), pp. 349–381.

7. J. Appell : *The superposition operator in function spaces.— A survey* ; Expositiones Mathematicae, **6** (1988), pp. 209–270.

8. E. Asplund : *Averaged norms* ; Israel Journal of Mathematics, **5**, (1967), pp. 227–233.

9. Th. Aubin : *Equations différentielles nonlinéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire* ; J. Math. Pures & Appl., (9) **55** (1976), pp. 269–293.

10. A. Bahri : *Topological results on a certain class of functionals and applications* ; J. Funct. Analysis, **41** (1981), pp. 397–427.

11. A. Bahri & H. Berestycki : *A perturbation method in critical point theory and applications* ; Trans. Amer. Math. Soc., **267** (1981), pp. 1–32.

12. A. Bahri & J.M. Coron : *Une théorie des points critiques à l'infini pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner* ; C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math., **300** (1985), pp. 513–516.

13. A. Bahri & J.M. Coron : *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : The effect of the topology of the domain* ; Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), pp. 253–294.

14. A. Bahri & P.L. Lions : *Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications* ; C. R. Acad. Sci. Paris, **301** (1985), pp. 145–147.

15. A. Bahri & P.L. Lions : *Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results* ; Comm. Pure & Appl. Math., **41** (1988), pp. 1027–1037.

16. V. Benci : *Some critical point theorems and applications* ; Comm. Pure & Appl. Math., **33** (1980), pp. 147–172.

17. V. Benci : *A geometrical index for the group S^1 and some applications to the study of periodic solutions of ordinary differential equations* ; Comm. Pure & Appl. Math., **34** (1981), pp. 393–432.

18. V. Benci : *On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries* ; Trans. Amer. Math. Soc., **274** (1982), pp. 533–572.

19. V. Benci & P.H. Rabinowitz : *Critical point theorems for indefinite functionals* ; Inventiones Math., **52** (1979), pp. 241–273.

20. H. Berestycki, Th. Gallouët & O. Kavian : *Equations de champ scalaire dans le plan* ; C. R. Ac. Sc. Paris, **297** série I (1983), pp. 307–310 (voir aussi Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6, # 83050).

21. H. Berestycki & P.L. Lions : *Nonlinear scalar fields equations* ; Arch. Rat. Mech. & Analysis, **82** (1983), pp. 313–376.

22. H. Berestycki, P.L. Lions & L.A. Peletier : *An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbb{R}^N$* ; Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), pp. 141–157.

23. L. Boccardo & F. Murat : *Remarques sur l'homogénéisation de certains problèmes quasi-linéaires* ; Portugaliae Mathematica, **41**, fasc. 1-4 (1982), pp. 535–562.

24. N. Bourbaki : *Topologie Générale* ; Editions Hermann, Paris 1974.

25. A. Brandt : *Interior estimates for second order elliptic differential (or finite-difference) equations via the maximum principle* ; Israel J. Math., **7** (1969), pp. 95–121.

26. H.J. Brascamp, E.H. Lieb & J.M. Luttinger : *A general rearrangement inequality for multiple integrals* ; J. Funct. Analysis, **17** (1974), pp. 227–237.

27. H. Brezis : *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert* ; North Holland, Amsterdam 1973.

28. H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications* ; Editions Masson, Paris 1983.

29. H. Brezis : *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. — The impact of topology* ; Proceedings of 50^{th} Anniv. Courant Inst., Comm. Pure & Appl. Math., **39**, (1986), pp. 517–539.

30. H. Brezis : *Some variational problems with lack of compactness* ; Proc. Sympos. Pure Math., **45**, Part I (1986), pp. 165–201, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

31. H. Brezis & J.M. Coron : *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture* ; Comm. Pure & Appl. Math., **37** (1984), pp. 149–187.

32. H. Brezis & T. Kato : *Remarks on the Schrödinger operator with complex potentials* ; J. Math. Pures & Appli., **58** (1979), n° 2, pp. 137–151.

33. H. Brezis & E.H. Lieb : *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals* ; Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), pp. 486–490.

34. H. Brezis & E.H. Lieb : *Minimum action solutions of some vector field equations* ; Comm. Math. Phys., **96** (1984), # 1, pp. 93–113.

35. H. Brezis & L. Nirenberg : *Characterization of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems* ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **4**, volume V, n° 2 (1978), pp. 225–326.

36. H. Brezis & L. Nirenberg : *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent* ; Comm. in Pure & Applied Math., **36** (1983), pp. 437–477.

37. F.E. Browder : *Infinite dimensional manifolds and nonlinear eigenvalue problems* ; Ann. of Math., (2) **82** (1965), pp. 459–477.

38. F.E. Browder : *Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces* ; Math. Ann., **175** (1968), pp. 89–113.

39. A.P. Calderón : *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz* ; Studia Math., **26** (1966), pp. 273–299.

40. Th. Cazenave & A. Haraux : *Introduction aux Problèmes d'Evolution Semi-Linéaires* ; Collection "Mathématiques & Applications" de la Société de Mathématiques Appliquées & Industrielles (SMAI), Editions Ellipses, Paris 1991.

41. D.C. Clark : *A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory* ; Indiana Univ. Math. J., **22** (1972), pp. 65–74.

42. C.V. Coffman : *A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equations* ; J. Analyse Math., **22** (1969), pp. 391–419.

43. C.V. Coffman : *On a class of nonlinear elliptic boundary value problems* ; J. Math. Mech., **19** (1970), pp. 351–356.

44. C.V. Coffman : *Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions* ; Arch. Rational Mech. & Analysis, **46 (6)** (1972), pp. 81–95.

45. S. Coleman, V. Glazer & A. Martin : *Action mimima among solutions to a class of euclidian scalar field equations* ; Comm. Math. Phys., **58** (1978), pp. 211–221.

46. J.M. Coron : *The continuity of the rearrangement in $W^{1,p}(\mathbb{R})$* ; Annali Sc. Sup. Pisa, classe di Sci., serie 1V, vol. XI, **1** (1984), pp. 57–85.

47. M. Cotlar & R. Cignoli : *An Introduction to Functional Analysis* ; North-Holland Texts in Advanced Mathematics, Amsterdam 1974.

48. R. Courant : *Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik* ; Math. Z., **7** (1920), pp. 1–57.

49. R. Courant : *Dirichlet's Principle* ; Interscience Publishers, "Pure and Applied Mathematics" a series of Texts and Monographs, volume 3, New York 1967.

50. R. Courant & D. Hilbert : *Methods of Mathematical Physics* ; Wiley, New York 1953 (volume 1), 1962 (volume 2).

51. M. Cwickel : *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators* ; Ann. Math., **106** (1977), pp. 93–100.
52. E.N. Dancer : *Boundary value problems for weakly nonlinear O.D.E.* ; Bull. Australian Math. Soc., **15** (1976), n° 3, pp. 321–328.
53. E.N. Dancer : *On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations* ; Proc. Royal Society Edinburgh, **76 A** (1977), pp. 283–300.
54. E.N. Dancer : *On the existence of solutions of certain asymptotically homogeneous problems* ; Math. Zeitschrift, **177** (1981), pp. 33–38.
55. E.B. Davies : *Heat Kernels and Spectral Theory* ; Cambridge Tracts in Mathematics # **92**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
56. J. Deny & J.L. Lions : *Les espaces de type Beppo Levi* ; Annales Inst. Fourier, **5** (1953–1954), pp. 305–370.
57. J. Dieudonné : *Éléments d'Analyse, volume 1* ; Gauthiers-Villars, Paris 1969.
58. J. Dieudonné : *Éléments d'Analyse, volume 2* ; Gauthiers-Villars, Paris 1974.
59. I. Ekeland : *On the variational principle* ; Journal of Mathematical Analysis & Applications, **47**, (1974), pp. 324–353.
60. I. Ekeland & R. Temam : *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels* ; Editions Dunod-Gauthiers-Villars, Paris 1974.
61. M. Escobedo & O. Kavian : *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation* ; J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **11** n° 10 (1987), pp. 1103–1133.
62. L.C. Evans : *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations* ; Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, # 74, 1990, AMS, Providence, RI.
63. E.B. Fabes & D.W. Strook : *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash* ; Arch. Rat. Mech. Analysis, **96** (1986), pp. 327–338.
64. E.R. Fadell, S.Y. Husseini & P.H. Rabinowitz : *Borsuk-Ulam theorems for arbitrary S^1-action and applications* ; Trans. Amer. Math. Soc., **274** (1982), pp. 345–360.
65. E. Fischer : *Über Quadratische Formen mit rellen Koeffizienten* ; Monatsh. Math. Phys., **16** (1905), pp. 234–249.
66. S. Fučik : *Boundary value problems with jumping nonlinearities* ; Cas. Pest. Mat., **101** (1976), pp. 69–87.
67. S. Fučik : *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems* ; "Mathematics & its Applications", volume 4, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (Holland), 1980.
68. M. Fukushima : *On an L^p estimate of resolvents of Markov processes* ; Research Inst. Math. Science, Kyoto Univ., **13** (1977), pp. 277–284.
69. E. Gagliardo : *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* ; Ricerche di Mat., **7** (1958), pp. 102–137 ; **8** (1959), pp. 24–51.

70. Th. Gallouët & O. Kavian : *Résultats d'existence et de non-existence de solutions pour certains problèmes demi-linéaires à l'infini* ; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. III (1981), pp. 201–546.
71. Th. Gallouët & O. Kavian : *Resonance for jumping nonlinearities* ; Comm. in PDE, **7** # 3 (1982), pp. 325–342.
72. B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg : *Symmetry and related properties via the maximum principle* ; Comm. in Math. Phys., **68** (1979), pp. 209–243.
73. B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg : *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$; in *Mathematical Analysis & Applications*, part A, Advances in Math. Supplementary Studies, (L. Nachbin, editor), **7 A** (1981), pp. 369–402.
74. D. Gilbarg & N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* ; Springer-Verlag, Heidelberg 1983.
75. E. Giusti : *Equazioni Ellittiche del Secondo Ordine* ; Pitagora Editrice, Bologna 1978.
76. P. Grisvard : *Singularities in Boundary Value Problems* ; Masson, Collection RMA, Paris 1992.
77. G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Pólya : *Inequalities* ; Cambridge University Press, London 1952.
78. L. Hedberg : *Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem* ; Acta Mathematica, **147** (1981), pp. 237–264.
79. E. Heinz : *An elementary analytic theory of the degree of mappings in N-dimension space* ; J. of Mathematics & Mechanics, vol. 8, n° 2 (1959), pp. 231–247.
80. J.A. Hempel : *Multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems* ; Indiana Univ. Math. J., **20** (1971), pp. 983–996.
81. P. Hess : *On a theorem by Landesman and Lazer* ; Indiana Univ. Math. J., **23** (1974), pp. 827–829.
82. E. Hewitt & K. Stromberg : *Real and Abstract Analysis* ; "Graduate Texts in Mathematics", Springer Verlag, Heidelberg, 1982.
83. E. Hopf : *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus* ; Ber. Preuss. Akad. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Kl, **19**, pp. 983–996, (1927).
84. T. Kato : *Growth properties of the reduced wave equation with a variable coefficient* ; Comm. Pure & Appl. Math., **12** (1959), pp. 403–425.
85. O. Kavian : *Quelques remarques sur le spectre demi-linéaire de certains opérateurs auto-adjoints* ; Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI, et Thèse (1985).
86. O. Kavian : *Minimum action solutions of nonlinear elliptic equations in unbounded domains containing a plane* ; Proc. Royal Soc. Edinburgh, **102 A** (1986), pp. 327–343.
87. O. Kavian & F.B. Weissler : *Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation* ; prépublications de l'Institut Elie Cartan, Nancy, Mai 1992.

88. J.L. Kazdan & F.W. Warner : *Remarks on some quasi-linear elliptic equations* ; Comm. Pure & Appli. Math., **28** (1975), pp. 567–597.

89. M.G. Krein & M.A. Rutman : *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space* ; Amer. Math. Soc. Transl. **26** (1950) (l'article original est en russe dans Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 3, **1** (23), 1948, pp. 3–95).

90. M.A. Krasnosel'skii : *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* ; Pergamon Press, London 1964.

91. K.M. Kwong : *Uniqueness of positive solution of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$; Arch. Rat. Mech. Analysis, **105** (1989), pp. 243–266.

92. O.A. Ladyženskaja & N.N. Ural'ceva : *Equations aux Dérivées Partielles de type Elliptique* ; Editions Dunod, Paris 1968.

93. E.M. Landesman & A.C. Lazer : *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance* ; J. Math. Mech., **19** (1970), pp. 609–623.

94. P.D. Lax & A.N. Milgram : *Parabolic equations* ; in *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*, Princeton 1954.

95. E.H. Lieb : *The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem* ; Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), pp. 751–753.

96. E.H. Lieb : *Existence and uniqueness of the minimizing solution of the Choquard's nonlinear equation* ; Studies in Applied Maths., **57** (1977) pp. 93–105.

97. E.H. Lieb : *On the lowest eigenvalue of the laplacian for the intersection of two domains* ; Invent. Math., **74** (1983), pp. 441–448.

98. E.H. Lieb : *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities* ; Annals of Math., **118** (1983), pp. 349–374.

99. E.H. Lieb & W. Thirring : *Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger equation and their relation to Sobolev inequalities* ; in *Studies in Mathematical Physics : Essays in Honor of Valentine Bargmann* (E.H. Lieb, B. Simon and A.S. Wightman editors), Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1976.

100. J.L. Lions : *Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles* ; Presses de l'Université de Montréal, "Séminaires de Mathématiques Supérieures (Été 1962)", Montréal 1965.

101. J.L. Lions : *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires* ; Editions Dunod-Gauthiers-Villars, Paris 1969.

102. J.L. Lions & E. Magenes : *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications (volume 1)* ; Editions Dunod, Paris 1968.

103. P.L. Lions : *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1* ; Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non-linéaire, **1** (1984), pp. 109–145.

104. P.L. Lions : *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2* ; Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non-linéaire, **1** (1984), pp. 223–283.

105. P.L. Lions : *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1* ; Revista Matemática Iberoamericana, **1**, # 1 (1985), pp. 145–201.
106. P.L. Lions : *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2* ; Revista Matemática Iberoamericana, **1**, # 2 (1985), pp. 45–121.
107. L. Ljusternik & L. Schnirelman : *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels* ; Hermann Editeur, Paris, 1934.
108. O. Lopes : *A constrained minimization problem with integrals on the entire space* ; à paraître.
109. P. Marcellini & C. Sbordone : *Semi-continuity problems in the calculus of variations* ; Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl., **4** (1980), pp. 241–257.
110. M. Marcus & V.J Mizel : *Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev Spaces* ; Arch. Rat. Mech. & Analysis, **45** (1972), pp. 294–320.
111. M. Marcus & V.J Mizel : *Nemytskij operators on Sobolev spaces* ; Arch. Rat. Mech. & Analysis, **51** (1973), pp. 347–370.
112. M. Marcus & V.J Mizel : *Superposition mappings which operates on Sobolev spaces* ; Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl., **2 (2)** (1978), pp. 257–258.
113. M. Marcus & V.J Mizel : *Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces* ; Trans. Amer. Mat. Soc., **251** (1979), pp. 187–218.
114. J. Mawhin & M. Willem : *Critical Point Theory & Hamiltonian Systems* ; "Applied Mathematical Sciences" # **74**, Springer-Verlag, New York, 1989.
115. V.G. Maz'ja : *Sobolev Spaces* ; Springer, Berlin (1985).
116. N. Meyers & J. Serrin : $H = W$; Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **51** (1964), pp. 1055–1056.
117. J.W. Milnor : *Morse Theory* ; Princeton University Press, Princeton, NJ, (1963).
118. C.B. Morrey : *Quasi-convexity and the semicontinuity of multiple integrals* ; Pacific J. Math., **2** (1952), pp. 25–53.
119. C.B. Morrey : *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* ; Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
120. J.R. Munkres : *Elements of Algebraic Topology* ; Addison-Wesley, Menlo Park (California), 1984.
121. F. Murat : *Compacité par compensation* ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, **5**, n° 3 (1978), pp. 489–507.
122. J. Nash : *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations* ; Amer. J. Math., **80** (1958), pp. 931–954.
123. L. Nirenberg : *On elliptic partial differential equations* ; Annali Sc. Normale Sup. Pisa, **13** (1959), pp. 115–162.
124. O.A. Oleinik, A.S. Shamaev & G.A. Yosifian : *Mathematical Problems in Elasticity & Homogenization* ; Studies in Mathematics and its Applications, # **26**, North Holland, Amsterdam, 1986.

125. R.S. Palais : *Morse theory on Hilbert manifolds* ; Topology, **2** (1963), pp. 299–340.
126. R.S. Palais : *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds* ; Topology, **5** (1966), pp. 115–132.
127. R.S. Palais : *Critical point theory and the minimax principle* ; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (**Global Analysis**), **15** (1970), AMS, Providence, RI.
128. R.S. Palais & S. Smale : *A generalized Morse theory* ; Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 165–171.
129. L.E. Payne : *Isoperimetric inequalities and their applications* ; SIAM Review, **9**, # 3 (July 1967), pp. 453–488.
130. L.E. Payne : *On two conjectures in the fixed membrane eigenvalue problem* ; Z. Angew. Math. Phys., **24** (1973), pp. 721–729.
131. S.I. Pohožaev : *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$; Sov. Math. Dokl., **6** (1965), pp. 1408–1411.
132. S.I. Pohožaev : *On an approach to nonlinear equations* ; Sov. Math. Dokl., **20** (1979), n° 4, pp. 912–916.
133. M.H. Protter & H.F. Weinberger : *Maximum Principles in Differential Equations* ; Springer-Verlag, New York 1984.
134. P.H. Rabinowitz : *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems* ; Eigenvalues of Nonlinear Problems, (1974, G. Prodi editor) pp. 141–195.
135. P.H. Rabinowitz : *Théorie du Degré Topologique et Bifurcation* ; notes d'un Cours de Troisième Cycle, rédigées par H. Berestycki ; publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6, Paris 1976.
136. P.H. Rabinowitz : *Free vibrations for a semilinear wave equation* ; Comm. in Pure & Applied Math., **31** (1978), pp. 31–68.
137. P.H. Rabinowitz : *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations* ; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe Scienza, seria IV, **2** (1978), pp. 215–223.
138. P.H. Rabinowitz : *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations* ; Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, # 65, published by the AMS, 1986.
139. M. Reed & B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics (*volume IV *Analysis of Operators)* ; Academic Press, New York 1978.
140. M. Renardy & R.C. Rogers : *An Introduction to Partia Differential Equations* ; "Texts in Mathematics # 1", Springer-Verlag, New York 1993.
141. F. Riesz : *Sur une inégalité intégrale* ; J.L.M.S., **5**, (1930), pp. 162–168.
142. F. Riesz & B.Sz. Nagy : *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* ; Sixième édition, Gauthiers-Villars, Paris 1972.
143. R.T. Rockafellar : *Convex Analysis* ; Princeton University Press, Princeton 1970.
144. G.V. Rosenbljum : *The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators* ; Soviet Math. Dokl., **13** (1972), pp. 245–249.
145. W. Rudin : *Analyse Réelle et Complexe* ; Editions Masson, Paris 1975.

146. B. Ruf : *On nonlinear problems with jumping nonlinearities* ; Annali di Matematicà Pura & Applicata, **28** (1981), pp. 133–151.
147. H.H. Schaefer : *Topological Vector Spaces* ; Macmillan Series in Advanced Mathematics & Theoretical Physics, New York, 1966.
148. J.T. Schwartz : *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points* ; Comm. Pure & Applied Math., **17** (1964), pp. 307–315.
149. J. Serrin : *On the definition and properties of certain variational integrals* ; Trans. Amer. Math. Soc., **101** (1961), pp. 139–167.
150. J. Serrin : *A symmetry problem in potential theory* ; Arch. Rat. Mech. & Analysis, **43**,# 4 (1971), pp. 304–318.
151. S. Smale : *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem* ; Ann. of Math., (2) **80** (1964), pp. 382–396.
152. G. Stampacchia : *Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus* ; Presses de l'Université de Montréal, série "Séminaires de Mathématiques Supérieures", #16, Montréal 1965.
153. E. Stein : *Singular Integral Operators and Differentiability of Functions* ; Princeton University Press, Princeton 1970.
154. W.A. Strauss : *Existence of solitary waves in higher dimensions* ; Comm. Math. Phys., **55** (1977), pp. 149–162.
155. M. Struwe : *Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems* ; Manuscripta Math., **32** (1980), pp. 335–364.
156. M. Struwe : *A global compactness results for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities* ; Math. Z., **187** (1984), pp. 511–517.
157. M. Struwe : *Large H-surfaces via the mountain pass lemma* ; Math. Ann., **270** (1985), pp. 441–459.
158. M. Struwe : *A generalized Palais-Smale condition and its applications* ; Proc. Sympos. Pure Math. (AMS, Providence, RI), **45**, part 2, (1986), pp. 335–364.
159. M. Struwe : *Variational Methods : Applications to Nonlinear PDE & Hamiltonian Systems* ; Springer, Berlin 1990.
160. G. Talenti : *Best constant in Sobolev inequality* ; Ann. Mat. Pura Appl., **110** (1976), pp. 353–372.
161. L. Tonelli : *La semicontinuità nel calcolo delle variazioni* ; Rend. Circ. Matem. Palermo, **44** (1920), pp. 167–249.
162. N.Th. Varopoulos : *Hardy-Littlewood theory for semigroups* ; J. Func. Analysis, **63** (1985), pp. 240–260.
163. H.F. Weinberger : *Remark on the preceding paper of Serrin* ; Arch. Rat. Mech. & Analysis, **43**,# 4 (1971), pp. 319–320.
164. H. Wente : *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature* ; J. Math. Analysis & Appl., **26** (1969), pp. 318–344.
165. K. Yosida : *Functional Analysis* ; Springer-Verlag, "Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften", #123, New York 1974.
166. E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis & its Applications. Volume I : Fixed Point Theorems* ; Springer-Verlag, New York 1986.

Index des notations

$\mathbf{BV}(\mathbb{R}^N)$ 265,
$(C(\Omega))^m$ 7,
$C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ 7,
$C^0(\Omega)$ 7,
$C^k(\Omega)$ 8,
$C^k(\overline{\Omega})$ 8,
$C_c^k(\Omega)$ 8,
$C_c^\infty(\Omega)$ 25,
$C_{c,\mathrm{rad}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ 302,
$C_0(\overline{\Omega})$ 7,
$C_b(\overline{\Omega})$ 7,
$C^{0,\alpha}(\Omega)$ 7,
$C_b^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 8,
$C^{k,\alpha}(\Omega)$ 8,
$C_b^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 8,
$\partial_i u$ 8,
$\mathscr{D}(\Omega)$ 25,
$\mathscr{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 293,
$\mathscr{D}_{\mathrm{rad}}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 302,
$H^m(\Omega)$ 24,
$H_0^m(\Omega)$ 25,
$H^{-m}(\Omega)$ 26,
$\mathscr{L}(E)$ 49,
$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$ 3,
$o(x)$ 53,
$\omega \subset\subset \Omega$ 15,
$\mathrm{Sp}(A)$ 49,
$W^{-m,p'}(\Omega)$ 26,
$W_0^{m,2}(\Omega)$ 25,
$W^{m,p}(\Omega)$ 24,
$x_n \rightharpoonup x^*$

Index

additivité 103,
adjoint 40,
aire 265,
Aleksandrov 44,
argument de bootstrap 48,
Ascoli 9,

bilaplacien 4,
bootstrap 48,
borné dans une direction 34,
Borsuk 109, 113, 132, 133,
Borsuk-Ulam 114,
bosse 249,
Brezis-Kato 48,
Brezis-Lieb 10,
Brouwer 98, 108, 132,

calcul des variations 1,
capacité 90,
Caratheodory 60,
Cartan 14,
chaleur 30,
champ de pseudo-gradient 164,
champ de pseudo-gradient tangent 205,
changement de variable 14,
classe C^k (ouvert de) 19,
coercive 6,
compacité 285,
compacité par compensation 85,
compact 49, 120,
complexifié 49,
condition de coercivité 38,
condition de Palais-Smale 156, 199,
cône normal 51,
continue (forme bilinéaire) 6,
contrainte 55,
convergence dominée 9,
— étroite 293,
— faible 5,
— forte 5,
— monotone 9,
— vague 293,
convexe 58,
convexe-concave 145,
cosinus directeur 20,
Courant-Fischer 213,
courbure moyenne 95,
croissance des valeurs propres 228,
Cwickel 231, 245,

décomposition de Cartan 14,
déformation rétracte 168,
déformer continûment 154,
degré topologique 102,
degré topologique de Brouwer 98,
dérivée de Gâteaux 53,
— directionnelle 52,
— faible 24,
— normale 20, 28,
déterminant de Van der Monde 76,

deuxième valeur propre 79,
dichotomie 285,
Dirichlet 1, 2,
divergentielle (sous forme) 39,

Eberlein-Shmulyan 6,
Egorov 10,
elliptique (uniformément) 6,
enlacé 173,
enlacement 184,
ensemble de niveau 153,
ensemble résolvant 48,
épigraphe 162,
équation d'Euler 54,
— d'Euler-Lagrange 55,
— de la chaleur 30,
— de Laplace 6,
équi-intégrabilité 12,
équi-négligeable 13,
équi-négligeable 283,
espace d'énergie 24,
état fondamental 196, 259, 266,
Euler 54,
Euler-Lagrange 55,
évanescence 285,
excision 103,
exposant critique de Sobolev 257,
extension 41,

faible* 5,
faiblement séquentiellement s.c.i. 135,
Fatou 9,
fermable 38,
fermé 38,
Fischer 213,
flambage 218,
flot 156, 166,
fonction de Caratheodory 60,
fonction de concentration 286,
fonctions implicites (théorème des) 55,
formule de Green 23,
formule de Stokes 23,
Fréchet 53,
Fredholm 49,

G_δ-dense 239,
G-dérivable 53,
Gagliardo 77,
Gagliardo-Nirenberg 31, 78,
Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 74, 75,
Gårding 50, 83,
Gâteaux 53,
Gauss 1,
genre 115, 116,
graphe 38,
Green 20,
Gronwall 237,
ground state 196, 259,

hamiltonien elliptique 95,
Hardy 308,
Hartman-Stampacchia 133,
hémicontinue 149, 137,
höldériennes 7,
homotope 104,
homotopie 104,
Hopf 43, 44,

identité de Pohožaev 253,
impaire 109,
indice 115,
inégalité de Gagliardo-Nirenberg 77, 78,
— — Gårding 50, 83,
— — Hardy 308,
— — Kato 37, 80, 81,

— — Korn 79, 80,
— — Nash 30,
— — Poincaré 34,
— — Poincaré-Wirtinger 36, 78, 79,
— — Rosenbljum-Lieb-Cwickel 231,
— — Sobolev 29,
— — Sobolev logarithmique 31,
— — Trudinger-Moser 32,
— — Young 64, 82,
intégrale de Dirichlet 2,
invariance par homotopie 104,

jacobien 15,
jacobienne 15,

Kato 37, 80, 81,
Kelvin 1,
Kolmogorov 14,
Kondrachov 33,
Korn 79, 80,
Krein-Rutman 50, 51,
Kuhn-Tucker 186,
Ky Fan-von Neumann 145, 147,

Lagrange 55,
Landau 53,
Laplace 2, 6,
Lax-Milgram 6,
lemme de concentration-compacité 285, 293,
— de déformation 155, 166,
— d'Ekeland 162,
— de Lax-Milgram 6,
— — Lieb 279,
— — Gronwall 237,
— — Minkowski 186,
— — Sard 106,
Leray-Schauder 124,
Lévy 286,
liaison 173, 184,
Lieb 10, 231,
Lieb-Cwickel 245,
Lieb-Thirring 231,
Lions (P.L.) 285, 293,
localement fini 165,
Lusin 10,

matrice jacobienne 15,
mesure superficielle 18, 265,
méthode du tir 252,
Minkowski 186,
Morrey-Sobolev 29,
Morse 168, 208,
Moser 32, 33, 75,
mountain pass theorem 169,
multiplicateur de Lagrange 55,

Nash 30,
Nemitsky 62,
Nirenberg 31, 74, 75, 77, 78,
non rétraction 107,
normal (cône) 51,
normale extérieure 20,
norme du graphe 38,
notation de Landau 53,

opérateur de prolongement 27,
— — superposition 62,
opérateur elliptique du second ordre 39,
— linéaire 38,
— local 60, 86,
— de Nemitsky 62,
oscillateur harmonique 193, 307,
ouvert de classe C^k 19,

p-laplacien 4,
paire 109,
Palais-Smale 156, 199,
paracompacité 165,
partie principale divergentielle 42,
partition de l'unité 165,
pendule forcé 190,
périmètre 265,
plaque encastrée 218,
plongement 18,
plus fin 165,
Poincaré 34, 90,
Poincaré-Wirtinger 36, 78, 79,
point cible 98,
point critique 54,
point régulier 54,
point-selle 145,
pointe 249,
positif (opérateur) 51,
principe de concentration-compacité 285, 290,
principe de Courant-Fischer 213,
— — Dirichlet 2,
— — min-max 169, 208,
— du maximum classique 43,
— — maximum d'Aleksandrov 44,
— — maximum de Hopf 44,
— — maximum faible 43,
— — maximum fort 43,
problème de Neumann 232,
problème de Stokes 217,
prolongement 76,
pseudo-gradient 164,
pseudo-gradient tangent 204,

quasi-convexe 138,
quotient de Rayleigh 212,

radiale 250,
radiale décroissante 250,
rayon spectral 49,
réarrangement 259,
réarrangement décroissant 260,
réciproque partielle 12, 72,
réflexif 5,
relations de Kuhn-Tucker 186,
Rellich-Kondrachov 33,
résolvante 49,
résolvante compacte 49,
restriction sur le bord 27,
robuste 101,
Rosenbljum-Lieb-Cwickel 231, 245,
Rutman 50, 51,

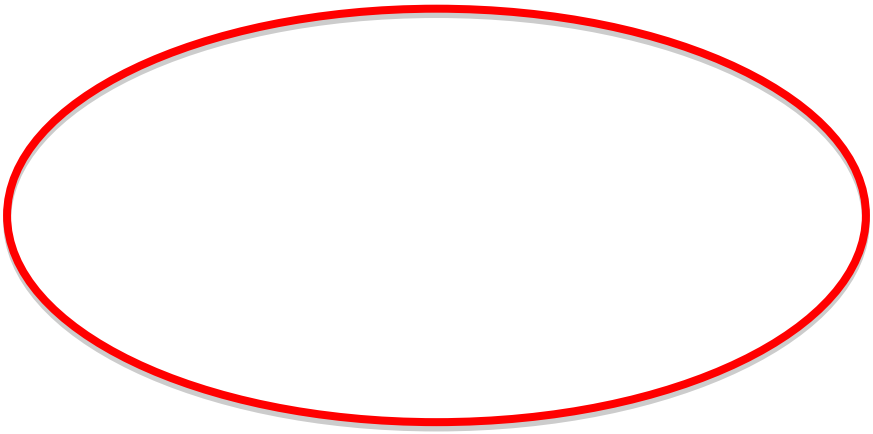
s.c.i. 59, 135,
s.c.s. 135,
sandwich 131,
saturée 186,
Schauder 46, 124,
Schwarz 259, 259,
semi-continue inférieurement 59, 135,
semi-continue supérieurement 135,
semi-groupe ultracontractif 30,
Smale 156, 199,
Sobolev 29, 31, 74, 75, 257,
spectre 49,
spectre de Fučik 241,
spectre demi-linéaire 241,
spectre ponctuel 49,
stabilité 101, 102, 103,
Stampacchia 70, 133,
Steklov 218,
Stokes 20, 23,
superposition 62,
symétrie sphérique 250,

symétrique (ensemble)109,
symétrisation de Schwarz 259,
symétrisée de Schwarz 260,

théorème de Borsuk 132,
— — changement de variable 14,
— du col 169, 170,
— de Krein-Rutman 50, 51,
— — Ky Fan-von Neumann 147,
— — Strauss 251,
— — Morse 168,
— — point fixe de Brouwer 108,
— — prolongement 76,
— — Rellich-Kondrachov 33,
— — viriel 256,
— — Weyl 230,
— des fonctions implicites 55,
théorie de Morse 154,
Thirring 231,
Tietze-Urysohn 7,
topologiquement nilpotent 51,
trace 27, 28,
Trudinger-Moser 32, 33, 75,
Tucker 186,

Ulam 114,
ultracontractif 30,
ultracontractivité 31,
uniformément elliptique 6,
uniformément höldérienne 8,
uniformément strictement convexe 141,

valeur critique 54, 55,
valeur régulière 54,
Van der Monde 76,
variation totale 265,
viriel 256,
visco-élasticité 138,
Vitali 13,
von Neumann 145, 147,

Wirtinger 36, 78, 79,

Young 64, 82,